CALCOLO

DIFFERENZIALE

ELEMENTI

di

CALCOLO INFINITESIMALE

DI

BARNABA TORTOLINI

PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME NELL'UNIVERSITA'
ROMANA DELLA SAPIENZA
E DI FISICA MATEMATICA NEL COLLEGIO URBANO
DI PROPAGANDA FIDE

Tom. 1. — Calcolo differenziale.

ROMA
Presso Francesco Bleggi Librajo
in via del Piè di Marmo N. 38.
1844

PREFAZIONE

Affidatomi nel novembre 1837 l' onorevole incarico d'insegnare il Calcolo Sublime nella Pontificia Romana Università, pensai a formare un corso di lezioni tali, che senza nulla contener di superfluo, potessero fornire a coloro, i quali frequentano la mia scuola, le cognizioni opportune per agevolare ad essi la lettura delle Opere de'più illustri geometri de'nostri tempi. Ne eseguii ben presto una prima redazione, la quale per altro non volli pubblicare, se prima non le avessi recate quelle modificazioni, che l'esperienza dell' insegnamento mi avrebbe potuto suggerire. Facendo ora veder la luce ad alcuni de'miei scritti, i quali contengono il Calcolo

differenziale non credasi, già che io li stimi tali, quali avrei desiderato presentarli al pubblico: ben conoscendo le molte imperfezioni dei medesimi avrei tardato ancor qualche anno a stamparli, se a ciò non mi avessero costretto gravi ragioni, che qui sarebbe superfluo esporre.

Qual sia l'ordine dell'Opera, e quali le teoriche, che più diffusamente ho trattato nel Calcolo differenziale, apparirà facilmente a chiunque dia una rapida occhiata alla tavola delle materie. Avendo adottato il metodo già noto dei limiti, e degli infinitamente piccoli; per istabilire in generale i principii del Calcolo differenziale, come quello che ora riconoscesi il più semplice ed il più rigoroso, è facile il prevedere, che ho dovuto profittare più volte di differenti teoriche, le quali trovansi esposte nel Corso di Analisi, nel Calcolo differenziale, e nelle applicazioni geometriche dell'illustre sig. *Cauchy*. Ho creduto necessario di rammentare in una introduzione i principii di alcune teoriche algebriche, le quali più strettamente connettonsi all'analisi infinitesimale; e poichè la derivazione delle funzioni dipende immediatamente dalla ricerca dei limiti, verso i quali convergono le espressioni

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}, \quad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

per valori della variabile α continuamente decrescenti, ho stimato doversi istituire una tal ricerca nella massima generalità; cioè prendendo per α un infinitesimo qualunque, o reale, od immaginario. Determinati in tal modo i limiti dei rapporti indicati (il che era già stato da me fatto in una Memoria pubblicata nel 1841), con molta facilità e brevità si ottengono le regole della differenziazione delle funzioni di una variabile immaginaria.

Fra le applicazioni sì analitiche, che geometriche delle teoriche spettanti al Calcolo differenziale, ho scelto quelle, le quali mi sono sembrate poter riuscire di maggior utilità nel Calcolo integrale, e nella Meccanica. Così nelle applicazioni geometriche a due coordinate, ho creduto dover esporre con qualche estensione le differenti importanti proprietà di due curve del quart'ordine, conosciute sotto il nome di *Ellissi* del *Cassini*, e *Lemniscata* di *Bernoulli*. La cognizione di tali proprietà trovasi di gran vantaggio, allorchè trattasi d' interpretare geometricamente le belle formole dimostrate nella teorica dei trascendenti Ellittici, nata per opera del conte di *Fagnano*, sviluppata da *Eulero*, da *Landen*, da *Lagrange*, e da *Legendre*; recata poi a tanta altezza pei successivi lavori dell'illustre *Abel* di Cristiania, e del sommo

geometra sig. *Jacobi*. Ho cercato di dare alle dimostrazioni dei teoremi fondamentali un tale sviluppo, da non lasciare alcun dubbio nelle menti dei giovani lettori. Allorchè ho conosciuto più vie, le quali simultaneamente interessassero per giungere al medesimo risultato, non ho lasciato d' indicarle tutte: persuaso che in un libro, destinato all'istruzione, molte cose possono aver luogo, le quali altrove si giudicherebbero superflue. Mi sono studiato in quanto era da me di dare al mio stile chiarezza, e proprietà. Chè se malgrado i miei sforzi queste doti essenziali del linguaggio scientifico troppo spesso si desiderassero nel mio libro; di un tal difetto, e di tutti gli altri che si troveranno in esso, mi verrà dato, io spero, un cortese perdono da coloro, i quali conoscono le difficoltà gravissime, che s'incontrano da chiunque imprenda di esporre in un trattato elementare i principii di una scienza.

INDICE DELLE MATERIE

contenute in questo volume.

NOZIONI PRELIMINARI

AL CALCOLO DIFFERENZIALE

CALCOLO DIFFERENZIALE

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE AD ALCUNE QUESTIONI DI ANALISI PURA.

APPLICAZIONE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ALLA GEOMETRIA.

INTRODUZIONE

APPLICAZIONI ALLA GEOMETRIA A DUE DIMENSIONI.

APPLICAZIONI ALLA GEOMETRIA ANALITICA A TRE DIMENSIONI.

NOZIONI PRELIMINARI

AL CALCOLO DIFFERENZIALE

Delle Variabili, e dei loro limiti, delle quantità infinitamente piccole, delle differenti specie di funzioni, delle serie convergenti, o divergenti, dei medii fra quantità date: Proprietà dei limiti, e delle quantità infinitamente piccole.

1.° L'esposizione dei principii del calcolo differenziale richiedendo la cognizione di alcune teorie dedotte dalla semplice analisi algebrica, sarà necessario qui di presentare un'indicazione sommaria con scegliere quelle che hanno un legame più intimo con il calcolo differenziale e sue applicazioni; tale è l'oggetto che ci proponiamo in questi preliminari, riserbandoci per ora la considerazione delle quantità, ed espressioni reali. Dovendo concepire le quantità destinate a ricevere aumenti, o decrementi vien subito una distinzione delle quantità variabili dalle quantità costanti, in modo che una quantità dicesi *variabile*, se può ricevere successivamente differenti valori gli uni dagli altri, all'opposto si chiama quantità *costante* quella che non può ricevere che un valore fisso, e determinato; così per esempio nel circolo, nelle linee del second'ordine, ... le coordinate dei punti sono altrettante *variabili*, il raggio, gli assi, il parametro sono *costanti* nelle medesime curve.

2.° Quando i valori successivamente attribuiti ad una medesima variabile si accostano indefinitamente ad un valore fisso, in modo da poterne assegnare una differenza sempre minore, allora l'ultimo valore si chiama il *limite* di tutti gli altri: fin dall'aritmetica si sa che un numero irrazionale non è altro che un limite delle diverse frazioni, che danno i valori di più in più approssimati: in geometria la superficie di un circolo è il limite verso il quale convergono le superficie dei poligoni regolari iscritti, quando il numero dei lati cresca indefinitamente, e son cogniti su quest'oggetto gli artifizi usati da *Archimede* dei quali si prevalse in seguito anche per la quadratura della parabola; così pure gli assintoti sono i *limiti* delle curve alle quali appartengono. L'indicazione del limite verso il quale converge una variabile verrà data per l'abbreviazione lim. posta avanti la variabile. Spesse volte accade che i limiti verso i quali convergono l'espressioni variabili si presentano sotto una forma indeterminata, e contuttociò non mancano particolari artifizi, mediante i quali si possono ottenere i veri valori di questi medesimi limiti, tali sarebbero le due espressioni variabili

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}, \qquad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

che si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$, $1^{\pm\infty}$, quando α converge verso lo zero; la determinazione di questi due limiti oltre di essere rimarcabile per semplice fatto analitico serve nel medesimo tempo di fondamento per la differenziazione delle quantità variabili, e quindi per scuoprire delle regole generali, con le quali si tolga qualunque indeterminazione, che si presenti in qualsiasi espressione, per i valori particolari delle variabili.

3.° Ed infatti per valori numerici piccolissimi di α si ha l'ineguaglianza

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}$$

quindi il rapporto $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ compreso fra i due valori $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 1$, e $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \cos\alpha$, dei quali il primo serve di limite al secondo, avrà esso stesso l'unità per limite, e si scriverà

$$\lim. \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

dalla quale si ha ancora

$$1 = \lim \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha\cos\alpha} = \lim \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha}$$

ed insieme

$$\lim \frac{2\operatorname{sen}\alpha}{2\alpha} = 1$$

cioè il limite verso il quale converge la corda all'arco nel circolo è sempre eguale all'unità: questa proprietà del circolo non è che una conseguenza particolare di una proposizione più generale, la quale si verifica in una curva qualunque, vale a dire che il limite verso il quale converge la corda all'arco per valori nulli dell'arco è eguale all'unità: ciò si proverà nell'applicazione del calcolo alla geometria.

4.° Passiamo ora alla ricerca del limite verso il qua-

le converge il binomio $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ per valori piccolissimi di α. Supponghiamo primitivamente α positivo, e della forma $\frac{1}{m}$, ove m sarà un numero intero variabile e suscettibile di un accrescimento indefinito, si avrà per la regola del binomio di Newton per un numero intero, e positivo

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots.$$

$$+\frac{1}{1.2.3\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{(m-1)}{m}\right)$$

Convergendo α verso le zero, lo stesso succederà dei termini $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$ .... per cui nel limite

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots$$

e siccome

$$\frac{1}{1.2} = 0,5 \quad \frac{1}{1.2.3} = 0,\ 16666 \quad \frac{1}{1.2.3.4} = 0,04166$$

così sommando queste frazioni verrà approssimativamente per α positiva

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 2,\ 7182\ \ldots$$

Questo numero che si presenta continuamente nell'analisi infinitesimale è stato convenuto di notarlo per la lettera e, e si scriverà

$$\lim\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

I logaritmi calcolati in questo numero preso per base si chiamano *Neperiani* od anche *iperbolici.*

5.° Supponiamo ora che α sempre positivo non sia più della forma $\frac{1}{m}$, ma bensì compreso il rapporto $\frac{1}{\alpha}$ fra due numeri interi consecutivi m ed $n=m+1$ in modo che chiamando ε, ε' due numeri variabili compresi fra zero, e l'unità si abbia

$$\frac{1}{\alpha}=m+\varepsilon=n-\varepsilon'$$

allora è evidente che le tre espressioni

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\quad \left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

delle quali le prime due comprendono la terza convergeranno verso un medesimo limite ed avvertendo che

$$m+\varepsilon=m\left(1+\frac{\varepsilon}{m}\right),\quad n-\varepsilon'=n\left(1-\frac{\varepsilon'}{n}\right)$$

sarà

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right\}^{1+\frac{\varepsilon}{m}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{1-\frac{\varepsilon'}{n}}$$

ma per le cose dimostrate

$$\lim\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^{1+\frac{\varepsilon}{m}}=\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$$

$$\lim\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{1-\frac{\varepsilon'}{n}}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

perciò $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ convergerà verso il medesimo limite.

Sia infine α una quantità negativa, in questo caso si ponga

$$1+\alpha=\frac{1}{1+\beta}$$

β sarà positivo, e convergerà con α verso lo zero, ed avremo facilmente

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=(1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}}=\left\{(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right\}^{1+\beta}$$

quindi

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim\left\{(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right\}^{1+\beta}=e^{\lim(1+\beta)}=e$$

Qui osserveremo che presi i logaritmi di un dato sistema nel binomio $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, e passando ai limiti si avrà

$$\lim.\mathrm{Log}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim\frac{\mathrm{Log}(1+\alpha)}{\alpha}=\mathrm{Log}\,e$$

d'onde risulterà anche

$$\text{Log.}\lim\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim \text{Log}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

d'onde se il numero e sia la stessa base dei logaritmi si avrà col chiamarli l semplicemente

$$\lim \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = 1$$

6.° Quando i successivi valori numerici di una variabile supposti piccolissimi decrescono indefinitamente in modo da divenir minori di qualunque numero dato, questa variabile si definisce un'*infinitesimo* od una quantità infinitamente piccola: queste variabili hanno zero per limite, e la variabile α considerata nelle precedenti operazioni gode di queste proprietà. Sarà utile di osservare altro essere un decremento costante, altro essere un decremento indefinito; la superficie di un poligono regolare circoscritto ad un circolo decresce costantemente aumentando il numero dei lati, ma non già indefinitamente, mentre ha per limite la superficie del circolo. Così anche i termini

$$\frac{2}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \ldots$$

prolungati indefinitamente decrescono costantemente, ma non già indefinitamente, mentre i successivi valori convergono verso il limite 1. All'opposto una variabile espressa da ciascun termine

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{7}$$

e prolungata all'infinito non decresce costantemente, ma indefinitamente, potendo divenir sempre minore di qualunque altro dato numero.

7.° Se i successivi valori numerici di una variabile vanno sempre crescendo in modo da divenir maggiori di un qualunque dato numero si dice che questa variabile ha per limite l'infinito positivo, e denotato con il simbolo ∞ se si tratta di variabile positiva, e l'infinito negativo $-\infty$ se si tratta di una variabile negativa; di qui le denominazioni di quantità *infinita*, od infinitamente grande; il numero m occorso nella ricerca del limite di $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ gode dell' enunciate proprietà. Qui parimenti è utile di osservare a non confondere una variabile che cresce indefinitamente con una variabile che cresca costantemente; così per esempio la superficie di un poligono regolare iscritto ad un circolo dato costantemente all'aumentare del numero dei lati, ma non già indefinitamente; i termini poi della serie dei numeri naturali

$$1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

crescono costantemente ed indefinitamente.

8.° Quando il rapporto di due quantità infinitamente piccole converge verso un dato limite mentre ciascuna di esse converge verso lo zero allora il limite trovato si chiama l'*ultima ragione* delle due quantità infinitamente piccole, così supponendo α infinitesimo, 1 sarà l'ultima ragione sen α, ed α, ed in un dato sistema di logaritmi, e diverso da e, Log e sarà l'ultima ragione di Log $(1+\alpha)$ ed α.

Veniamo ora a dire qualche cosa sulla natura, e divisione delle funzioni di una, o più variabili.

9.° Una quantità variabile si chiama funzione di un' altra quantità variabile che dicesi *indipendente*, se deter-

minata questa rimane necessariamente determinata la prima: così per esempio in un'ellissi determinati gli assi, il rimanente sarà determinato, e per conseguenza il perimetro, la superficie, le distanze focali sono funzioni degli assi principali: Nell'equazione di una curva riferita a due coordinate, determinata che sia l'ascissa, sarà completamente cognita l'ordinata, onde l'ordinata è funzione dell'ascissa.

Una quantità variabile è funzione di altre quantità variabili chiamate *indipendenti* se per determinare la prima è necessaria, e sufficiente che sieno determinate le seconde; così per esempio in un triangolo, ciascun angolo, la superficie . . . sono funzioni dei tre lati purchè sieno determinati. Inoltre osservando che più variabili possono essere unite fra loro per mezzo di un'equazione, sarà lecito il concludere essere una qualunque, funzione delle rimanenti. Le differenti specie di funzioni che ci dà tanto l'algebra, che la trigonometria racchiudendo altrettante variabili indipendenti sono funzioni di queste variabili, per cui

$$x^m\,,\ \log x\,,\ a^x\,,\ \operatorname{sen} x\,,\ \operatorname{tang} x$$

sono funzioni della x

$$(ax + by + c)^n\,,\quad x^y\,,\ ax\cos y + \frac{xz}{c} + x^2\log y \operatorname{sen} z$$

sono funzioni delle variabili x, y od x, y, z.

10.° Le funzioni poi di una, o più variabili si dividono in *esplicite*, ed *implicite*. Le prime sono quelle, che trovansi immediatamente espresse per mezzo di queste stésse variabili; all'opposto sono le implicite, in queste ultime non vengono date che le relazioni, od equazioni che devono essere soddisfatte, mentre rimangono

ancora algebricamente insolute, e per renderle esplicite basterebbe risolvere nei casi possibili l'equazioni che le determinano, così in

$$\text{Log}\,(y) = x$$

la y è funzione implicita della x, ed al contrario risoluta riguardo ad y, e chiamando a la base dei logaritmi si ha l'esplicita

$$y = a^x$$

Per rappresentare le funzioni esplicite di una, o più variabili si sogliono adoprare le lettere f, F, φ, χ, ψ, poste avanti la variabile o variabili separate da virgole, e chiuse da due parentesi, cioè

$$f(x)\ ,\quad \mathrm{F}(x)\ ,\quad \varphi(x)\ ,\quad \chi(x)\ ,\quad \psi(x)$$

$$f(x, y, z\,...)\ ,\ \mathrm{F}(x, y, z\,...)\ ,\ \varphi(x, y, z\,...)\ ,\ \chi(x, y, z\,...)...$$

11.° Inoltre le funzioni di una sola variabile x si dividono in *semplici*, e *composte*. Le prime chiameremo quelle che provengono da una sola operazione eseguita sulla variabile x, le seconde poi si chiamano quelle, che risultano da più operazioni eseguite sulla stessa variabile. Le funzioni semplici provengono sì dall'algebra, che dalla trigonometria: la somma, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l'elevazione a potenza, l' estrazione di radici, la formazione degli esponenziali, e dei logaritmi appartengono all' algebra: le funzioni *seno*, e *coseno* appartengono alla trigonometria quindi chiamando a una quantità costante ed x la variabile, tutte le funzioni semplici si ridurranno alle seguenti

$$a + x\ ,\ a - x\ ,\ ax\ ,\ \frac{a}{x}\ ,\ x^a\ ,\ a^x\ ,\ \text{Log}\,x\ ,\ \log x$$

$$\text{sen}\,x\ ,\quad \cos x\ ,\quad \text{arc sen}\,x\ ,\quad \text{arc cos}\,x$$

ove non tralascieremo di notare che mediante la relazione $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, basterebbe annoverare soltanto $\operatorname{sen} x$ per funzione semplice, ma per il continuo uso di queste linee sarà utile di includere ambedue.

Le funzioni composte, che sono il risultato di più operazioni saranno *funzioni* di *funzioni* tali sarebbero

$$\operatorname{sen} x^m \quad , \quad \log \operatorname{sen} x.$$

Alcune delle funzioni composte si sogliono chiamare anche *algebriche*, ed è stato convenuto di dare un tal nome a quelle, che provengono dalle prime operazioni dell'algebra, vale a dire la somma, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l' elevazione a potenze ad esponenti cogniti; si chiameranno per conseguenza funzioni *esponenziali*, o *logaritmiche* quando variabili sono gli esponenti nelle funzioni, o queste racchiudono dei logaritmi.

12.° Le funzioni algebriche si dividono in *funzioni razionali*, e *funzioni irrazionali*; le prime non ammettono che esponenti interi nella variabile, e si chiama *funzione intera* un polinomio della forma

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

ed insieme *funzione frazionaria*, o *funzione razionale* il rapporto di due funzioni intere o di due polinomi simili. Una funzione intera di primo grado

$$A + Bx$$

si chiama eziandio *funzione lineare*, mentre in geometria rappresenta l'ordinata di una linea retta: le seconde poi, cioè le *irrazionali* vengono constituite da qualunque altra funzione ove non sieno formate operazioni di loga-

ritmi di esponenti variabili, ed anche di trigonometria. Infine le funzioni che ci dà la trigonometria si chiamano *funzioni trigonometriche*, o *circolari*. Tutto ciò che abbiamo detto per le funzioni di una sola variabile si estende senza difficoltà per le funzioni di un numero qualunque di variabili, e che per brevità tralascieremo di sviluppare.

13.° Le quantità infinitamente piccole ci conducono a dire qualche cosa sulla continuità, e discontinuità delle funzioni, e che può ridursi a quanto segue
Sia

$$y = f(x)$$

una funzione di una sola variabile x, se si chiami h un'incremento qualunque della x o finito anche esso, od infinitesimo, il corrispondente incremento della funzione sarà

$$f(x+h) - f(x)$$

Ciò posto si dirà che $f(x)$ è una funzione continua della x entro due dati limiti della medesima, se fra questi limiti le due differenze

$$h\,,\ f(x+h) - f(x)$$

sieno simultaneamente infinitesime, o ciò che torna lo stesso, quando fra due dati limiti della x conservando la funzione costantemente un valore finito, e determinato, ad un incremento infinitamente piccolo della variabile indipendente corrisponda un incremento infinitamente piccolo della funzione. Per mostrare alcune applicazioni sieno le due funzioni

$$y = \operatorname{sen} x\,, \qquad y = a^x$$

daranno evidentemente

$$\text{sen}\,(x+h)-\text{sen}\,x = 2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}h\cos\,(x+\tfrac{1}{2}h)$$

$$a^{x+h}-a^x = a^x\,(a^h-1)$$

e siccome per $h=o$ convergeranno verso lo zero le due differenze delle funzioni, mentre qualunque sia la x, oltre di annullarsi $\text{sen}\,\frac{1}{2}h$, a^h-1 per $h=o$, mantengono un valore finito le due funzioni $\cos(x+\frac{1}{2}h)$, a^x così le due funzioni proposte $\text{sen}\,x$, a^x, saranno continue entro l'infinito positivo, e l'infinito negativo.

Si prenda inoltre

$$y=\frac{m^2}{2x-b-c}$$

avremo

$$\frac{m^2}{2(x+h)-b-c}-\frac{m^2}{2x-b-c}=-\frac{2m^2h}{(2x-b-c)\,(2x+2h-b-c)}$$

quindi prendendo per valore della x

$$x=\frac{b+c}{2}$$

la differenza della funzione converge verso l'infinito, e per conseguenza la proposta funzione non è continua entro i limiti b, c, e per il valore $x=\frac{b+c}{2}$ ci sarà *soluzione di continuità*: lo stesso succede per le due funzioni

$$\frac{1}{x},\quad \text{tang}\,x$$

Nella prima per $x=o$, e nella seconda per $x=\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$,
essendo n un numero intero. Se si riprendano le funzioni semplici di sopra enumerate, cioè

$$a+x\ ,\ a-x\ ,\ ax,\frac{a}{x}\ ,\quad x^a\ ,\ a^x,\ \mathrm{Log}\,x$$

$$\mathrm{sen}\,x\ ,\quad \cos x\ ,\quad \mathrm{arc\ sen}\,x\ ,\quad \mathrm{arc\ cos}\,x$$

saranno queste continue fra due limiti finiti della variabile x, purchè rimanendo costantemente reali entro i medesimi limiti, non divengano infinite nell' intervallo dei valori estremi; dunque ciascuna funzione semplice sarà continua nella vicinanza di un valor finito attribuito alla x; per le funzioni

$$a+x\ ,\quad a-x,\ ax\quad a^x,\quad \mathrm{sen}\,x\ ,\quad \cos x$$

questo valor sarà compreso fra i limiti $x=-\infty$, $x=\infty$.
Per la funzione $\frac{a}{x}$ fra i limiti $x=-\infty$, $x=o$ od anche fra i limiti $x=o$, $x=\infty$.

Per le funzioni x^a , Log x entro i limiti $x=o$, $x=\infty$; e per le due rimanenti

$$\mathrm{arc\ sen}\,x\ ,\quad \mathrm{arc\ cos}\,x$$

fra i limiti $x=-1$, $x=+1$.

Se l'esponente a nella funzione semplice x^a sia espresso per $a=\pm m$ (essendo m un numero intero) allora x^m resta continuo nella vicinanza di un valore della x compreso fra i limiti $x=\infty$, $x=-\infty$ e per x^{-m} fra i limiti $x=-\infty$ $x=o$, od anchè fra $x=o$, $x=\infty$;

infine le due funzioni semplici $\frac{a}{x}$, x^{-m} sono le sole che divengono discontinue per un valore della x, compreso nell'intervallo dei limiti fra i quali le medesime funzioni restano reali; ed infatti per $x=0$ le due funzioni

$$\frac{a}{x}, \quad x^{-m}$$

divengono infinite, e quindi discontinue.

14.° Facciamo un cenno sulle serie convergenti, e divergenti.

Un seguito indefinito di quantità

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots . u_{n-1}$$

che derivano l'una dall'altra secondo una legge data si chiama *serie*, e ciascuna delle quantità u_0, u_1, ... costituisce un termine della *serie*, l'unione di essi saranno i differenti termini, cosicchè chiamando s_n la somma degli n primi termini si abbia

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}.$$

Se per valori infinitamente grandi del numero n la somma s_n si accosta ad un dato limite s, la serie si dice *convergente*, e questo limite sarà la somma della serie; all' opposto se mentre n cresce indefinitamente la somma s_n non si accosta ad alcun limite fisso, la serie si dirà *divergente*, e sarà priva di somma. Diverse regole esistono delle quali parleremo in seguito, per riconoscere la convergenza, o divergenza delle serie: ci basterà notare presentemente, che prendendo due termini con-

secutivi , u_{n+1} , u_n , la serie sarà convergente se il rapporto

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

per valori grandissimi di n converga verso un limite minore dell'unità (*), in modo che si abbia

$$\lim \frac{u_{n+1}}{n_n}$$

Nel caso poi che si avesse $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ la serie potrà essere o convergente, e divergente (**).

La ricerca del limite del binomio $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ per $\alpha = o$ che abbiamo fatto antecedentemente ci conduce ad una serie, della quale si farà un continuo uso e che da gran tempo ha meritato tutta l'attenzione degli analisti : infatti chiamando m un numero convergente verso l'infinito, si avrà

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+x+\frac{x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{x^3}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots\ldots$$

d'onde

$$lim \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

(*) Cauchy, Cours d'Analyse 1821. Idem Leçons sur le Calcul differentiel 1829.

(**) Si può consultare su quest'oggetto una Memoria del sig. Duhamel inserita nel tom. 4. del giornale del sig. Liouville.

la qual serie è convergente mentre il rapporto dei termini

$$\frac{x^{n+1}}{1 . 2 . 3 \ldots n . n+1}, \frac{x^n}{1 . 2 . 3 . . n}$$

cioè

$$\frac{x}{n+1}$$

decresce continuamente per valori di n sempre maggiori in modo da potersi verificare, qualunque sia x

$$\lim \frac{x}{n+1} < 1$$

Si chiami α una quantità infinitamente piccola, e pongasi $x = m\alpha$, sarà

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = (1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}}$$

quindi

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = \lim \left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^x = e^x$$

e per conseguenza

$$\lim \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1:2} + \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \ldots$$

ove $x = 1$ riproduce $e = 2, 71828 \ldots$. Se la x avesse ad essere negativa, si trova la serie

$$\lim \left(1-\frac{x}{m}\right)^m = e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 . 2} - \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \ldots$$

15.° Più volte nella ricerca dei limiti sono occorse, ed occorreranno in seguito delle quantità comprese fra altre quantità date, od in altri termini, si sono presentate delle quantità per lo più incognite, e che dai geometri diconsi *medii:* diverse proposizioni, e teoremi importanti si hanno sulle quantità medie, delle quali diremo brevemente una qualche cosa.

Se una quantità sia compresa fra la più grande, e la più piccola di quelle, che si considerano, chiamasi questa un *medio* fra quelle: dopo questa definizione è evidente, che fra un numero di quantità ineguali esiste un infinità di *medii* ed è cognito fin dagli elementi dell'algebra il medio si aritmetico, che geometrico; il primo dei quali, se n rappresenti un numero di quantità a, a', a'', a''', ... sarà

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \dots}{n}$$

Il secondo poi sarà

$$\sqrt[n]{aa'a''a''' \dots}$$

Ciò posto nelle quantità ineguali, ed espresse sotto forma di frazione

$$\frac{a}{b},\ \frac{a'}{b'},\ \frac{a''}{b''} \dots$$

la somma dei numeratori divisa per la somma dei denominatori, cioè

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \dots}{b + b' + b'' + b''' + \dots}$$

sarà un *medio* fra $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ... Nell'ipotesi di $b = b' = b'' = ... = 1$ si riduce al medio aritmetico di già indicato.

Nello stesso modo formando altrettanti radicali

$$\sqrt[b]{a}\ ,\quad \sqrt[b']{a'}\ ,\quad \sqrt[b'']{a''}\ ,\ \ldots$$

un *medio* fra questi sarà un nuovo radicale del grado $b + b' + b'' + ... = s$ del prodotto $a\,a'\,a''$ .... vale a dire

$$\sqrt[s]{a\,a'\,a''\ldots}$$

Di più se α, α', α'', ... sieno quantità del medesimo segno, la funzione

$$\frac{\alpha\, a + \alpha' a' + \alpha'' a''}{\alpha\, b + \alpha' b' + \alpha'' b''}$$

sarà un medio fra le quantità

$$\frac{a\,\alpha}{\alpha\, b},\ \frac{a'\alpha'}{\alpha' b'},\ \frac{a''\alpha''}{\alpha'' b''},\ \ldots$$

ossia fra le medesime

$$\frac{a}{b},\ \frac{a'}{b'},\ \frac{a''}{b''},\ \ldots$$

Nell'ipotesi di $b = b' = b'' = \ldots = 1$, allora è chiaro che la somma dei prodotti dati dal numeratore sarà

$$a\,\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots = (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots)\, A$$

ove A è un *medio* fra a, a', a'', ... Il valore di A è molto utile nella ricerca dei centri di gravità. Si porrà fine a queste brevi osservazioni sui *medii* facendo avvertire che se a, b rappresentino due valori di un' incognita x, ove sia $b > a$, un *medio* fra queste sarà

$$a + \theta \, (b - a)$$

il numero θ incognito verificherà la condizione di essere > 0, e < 1.

16.° Questa prima parte dei nostri preliminari avrà termine coll'indicare brevemente alcune proprietà dei *limiti*, e degli *Infinitesimi*. Più volte occorrerà di dover calcolare i limiti di un prodotto, di un quoto di quantità, e conviene premettere alcuni teoremi facili ad essere dimostrati, cioè « Che il limite di un prodotto di quantità simultaneamente variabili è eguale al prodotto dei corrispondenti limiti ». Che il limite di un quoziente delle medesime variabili è eguale al quoto dei loro limiti.

Sieno infatti P, Q le quantità variabili, e p, q i loro limiti, avremo per P, Q i valori

$$P = p + \alpha \,, \quad Q = q + \beta$$

α, β, devono svanire ai limiti; quindi

$$PQ = pq + p\beta + q\alpha + \alpha\beta$$

e passando ai limiti

$$\lim PQ = pq = \lim P \,.\, \lim Q$$

Nello stesso modo si avrebbe per il quoto

$$\frac{P}{Q} = \frac{p + \alpha}{q + \beta} = \frac{\frac{p}{q} + \frac{\alpha}{q}}{1 + \frac{\beta}{q}}$$

e passando ai limiti

$$\lim \frac{P}{Q} = \frac{p}{q} = \frac{\lim P}{\lim Q}$$

Se di una quantità infinitesima α, si considerano le diverse potenze

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \alpha^4, \ldots \alpha^n$$

Si diranno queste, infinitesime del primo, del secondo, del terzo, ... ed in generale dell' n^{esimo} ordine; di qui se $f(\alpha)$ svanisca per $\alpha = 0$ sarà essa un infinitesimo dell' ordine n^{esimo}, quando divisa per α^n, il quoto converga verso una quantità k finita, e diversa da zero, vale a dire

$$\lim \frac{f(\alpha)}{\alpha^n} = k$$

e per conseguenza fuori del limite potremo stabilire

$$f(\alpha) = k\,\alpha^n\,(1 + \varepsilon)$$

per forma di un infinitesimo dell'ordine n: il numero ε è anche esso infinitesimo, e svanisce per $\alpha = 0$. Così per esempio $\operatorname{sen} \alpha$, per valori piccolissimi di α, è un infinitesimo di primo ordine, mentre

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$$

L'espressione Log $(1+\alpha)$, è anche essa un infinitesimo di primo ordine, avendosi

$$\lim \frac{\text{Log}\ (1+\alpha)}{\alpha} = \text{Log}\ e$$

La funzione

$$1 - \cos\alpha = 2\ \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

sarà un infinitesimo di second'ordine, mentre

$$\lim \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = \lim.\ \frac{1}{2}\left(\frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Nel calcolo differenziale daremo delle regole per conoscere subito l'ordine di un infinitesimo. Non solo da una potenza di un medesimo infinitesimo si rileva l'ordine del nuovo infinitesimo, ma anche dal prodotto di più infinitesimi, così α, β essendo due infinitesimi del primo ordine, il prodotto delle loro potenze dei gradi, m, n, cioè $\alpha^m\ \beta^n$ sarà un infinitesimo dell'ordine $m+n$; come all'opposto il quoto

$$\frac{\alpha^m}{\beta^n}$$

sarà un infinitesimo dell'ordine $m-n$, purchè sia $m>n$. Molte proprietà e conseguenze si potrebbero dedurre dai diversi ordini degli infinitesimi, ma per brevità ci basterà indicare che se n, n', n'' ... sieno altrettanti numeri interi, ed a, b, c ... altrettante costanti, e si formino gli infinitesimi

$$a\,\alpha^n,\quad b\,\alpha^{n'},\quad c\,\alpha^{n''},\ \ldots.$$

degli ordini n, n', n'', ... l'ordine del nuovo infinitesimo

$$a\alpha^{n} + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \dots$$

che proviene dalla somma dei medesimi, dovrà desumersi dal più piccolo dei numeri interi n, n', n'', ...

Tutte le precedenti considerazioni suppongono sempre reale il corso delle variabili: importando quindi di conoscere quali sieno i risultati nel caso delle variabili immaginarie passeremo alla seconda parte dei nostri preliminari al calcolo differenziale.

Sopra le quantità, od espressioni immaginarie, e sui loro moduli. Limiti delle medesime. Riduzioni di alcune espressioni immaginarie. Sulla convergenza o divergenza delle serie immaginarie.

17.° Quante volte in analisi s'incontri un espressione simbolica della forma

$$a + b\sqrt{-1}.$$

ove a, b sieno reali, si dirà questa un'*espressione immaginaria*; la quale da per se sola nulla significa non essendo altro che una combinazione di segni algebrici. Due espressioni immaginarie

$$a + b\sqrt{-1}\ , \qquad c + d\sqrt{-1}$$

diconsi eguali, se sono eguali le parti reali a, c fra loro, ed i coefficienti b, d di $\sqrt{-1}$, vale a dire

$$a = c\ ;\quad b = d$$

l'eguaglianza

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$$

dicesi *Equazione immaginaria*: due espressioni immaginarie

$$a + b\sqrt{-1}\,, \quad a - b\sqrt{-1}$$

si dicono *conjugate*, delle quali la lor somma $2a$ reale, la lor differenza $2b\sqrt{-1}$ immaginaria, ed il loro prodotto $a^2 + b^2$ parimenti reale. L'uso delle espressioni immaginarie è di una grande utilità in tutti i rami dell'analisi matematica, ed ognun sa che queste possono essere soggette all'ordinarie operazioni dell'algebra a guisa delle quantità reali; così conservando le regole che si hanno per la somma, per la sottrazione e per la moltiplicazione delle quantità reali si ottengono da queste tre operazioni, nuove espressioni immaginarie; cioè

$$a + b\sqrt{-1} + a' + b'\sqrt{-1} = a + a' + (b + b')\sqrt{-1}$$

$$a + b\sqrt{-1} - (a' + b'\sqrt{-1}) = a - a' + (b - b')\sqrt{-1}$$

$$(a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1}) = aa' - bb' + (ab' + ba')\sqrt{-1}$$

Infine dividere un'espressione immaginaria per un'altra significa, trovare una terza espressione immaginaria che moltiplicata per il divisore riproduca il dividendo; così

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b'\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(a' - b'\sqrt{-1})}{a'^2 + b'^2}$$

ovvero

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b'\sqrt{-1}} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{(a'b - ab')}{a'^2 + b'^2}\sqrt{-1}$$

18.° Una qualunque espressione simbolica immaginaria gode della proprietà di potersi rappresentare sotto la forma trigonometrica

$$r(\cos t + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,t)$$

essendo r una quantità reale positiva, e t un'arco parimenti reale, quindi avremo per la condizione

$$a + b\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,t)$$

d'onde necessariamente

$$a = r\cos t\,, \qquad b = r\,\text{sen}\,t$$

dalla quale

$$a^2 + b^2 = r^2$$

L'arco t si determina evidentemente dalle formole trigonometriche

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \qquad \text{sen}\,t = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

le quali includono la formola unica

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen}\,t}{\cos t} = \text{tang}\,t$$

Ove se si rappresenti per arc tang t l'arco compreso fra i due limiti $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ è chiaro che l'arco t verificherà la condizione

$$t = n\pi + \text{arc tang}\frac{b}{a}$$

essendo n un numero intero. Resta dunque provato che si può soddisfare a qualunque espressione immaginaria $a+b\sqrt{-1}$ per valori reali di r, e t in funzione di a e b.

La quantità r si chiama il *modulo* dell' espressione immaginaria, e t l'*argomento* : essendo poi, come abbiamo dimostrato, il modulo eguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei due termini a, b è evidente che se l'espressione immaginaria $a+b\sqrt{-1}$ si riduce alla semplice a reale per l'annullamento di b, il modulo sarà il valor numerico di $\sqrt{a^2}$.

19. La teoria dei *moduli* dell'espressioni immaginarie è di un grand'interesse nell'analisi matematica sì pura che applicata, e la combinazione di essi conduce alcune volte a proposizioni utili, ed eleganti, così per esempio « la somma di più espressioni immaginarie dà origine ad una nuova espressione immaginaria della quale il *modulo* è sempre minore della somma dei moduli rispettivi; ed infatti chiamando R, e T il modulo, e l'argomento di questa somma sarà dalle formole

$$a+b\sqrt{-1}=r(\cos t+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,t)$$

$$a'+b'\sqrt{-1}=r'(\cos t'+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,t')$$

la nuova espressione

$$a+b\sqrt{-1}+a'+b'\sqrt{-1}+\ldots$$

$$=r\cos t+r'\cos t'+\ldots+(r\,\mathrm{sen}\,t+r'\,\mathrm{sen}\,t')\sqrt{-1}+\ldots$$

$$=\mathrm{R}\,(\cos \mathrm{T}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{T})$$

quindi

$$\mathrm{R}^2=(r\cos t+r'\cos t'+\ldots)^2+(r\,\mathrm{sen}\,t+r'\,\mathrm{sen}\,t'+\ldots)^2$$

ovvero

$$R^2 = r^2 + r'^2 + \ldots + 2rr' \cos (t - t') + \ldots$$

La qual quantità essendo evidentemente minore di

$$r^2 + r'^2 + \ldots + 2rr' + \ldots = (r + r' + \ldots)^2$$

ne verrà $R < r + r' + \ldots$ come si era di già enunciato.

Nella stessa guisa moltiplicando fra di loro un sistema qualunque di espressioni immaginarie, si ottiene una nuova espressione immaginaria, della quale il *modulo* è eguale al prodotto dei moduli, e l'*argomento* eguale alla somma degli rispettivi argomenti. Ciò si scorge dalla composizione della formola

$$(a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1}) \ldots$$

$$= rr' \ldots (\cos t + \sqrt{-1} \operatorname{sen} t)(\cos t' + \sqrt{-1} \operatorname{sen} t') \ldots$$

e che mediante le formole che esprimono i seni e coseni della somma di archi si otterrà

$$(a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1})(a'' + b''\sqrt{-1}) \ldots$$

$$= rr'r'' \ldots (\cos (t + t' + t'' + \ldots) + \sqrt{-1} \operatorname{sen} (t + t' + t'' + \ldots)) \ldots$$

$$= R(\cos T + \sqrt{-1} . \operatorname{sen} T)$$

d'onde

$$R = rr'r'' \ldots \qquad T = t + t' + t'' + \ldots$$

Se le espressioni immaginarie oltre essere m di numero sieno anche eguali fra loro per cui abbiasi

$$a = a' = a'' = \ldots \qquad b = b' = b'' = \ldots$$

$$r = r' = r'' = \ldots \qquad t + t' + t'' + \ldots = mt$$

o ciò che torna lo stesso

$$R = r^m \ , \qquad T = mt$$

si dedurrà la formola

$$(a + b\sqrt{-1})^m = r^m (\cos t + \sqrt{-1} \operatorname{sen} t)^m$$

$$= r^m (\cos m t + \sqrt{-1} \operatorname{sen} mt)$$

Di qui l'equazione rimarcabile

$$(\cos t + \sqrt{-1} \operatorname{sen} t)^m = \cos m t + \sqrt{-1} \operatorname{sen} mt$$

la quale sussiste per valori interi, e positivi di m. Sviluppando il primo membro mediante la formola di Newton, e facendo eguaglianza fra le espressioni reali, e l'immaginarie si hanno i seni, e coseni degli archi multipli espressi per le potenze dei medesimi seni, e coseni. È facile poi estendere quest' ultima formola per m frazionario, e positivo, per m negativo intero, e frazionario, ed in fine l'analogia ci porta a concludere, che eziandio sussista per valori irrazionali dell'esponente. Ed infatti considerando le due espressioni immaginarie

$$\cos \frac{t}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{t}{m}, \quad \cos t + \sqrt{-1} \operatorname{sen} t$$

si vede che la seconda è la potenza m^{esima} della prima, ovvero la prima è la radice del grado m della seconda, mentre per l'ultima formola trovata si avrà

$$\left(\cos \frac{t}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{t}{m}\right)^m = \cos t + \sqrt{-1} \operatorname{sen} t$$

dunque per valori frazionari positivi dell' esponente risulterà

$$(\cos t + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ t)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{t}{m} + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{t}{m}$$

Nello stesso modo per valori negativi interi, o frazionari si ha primieramente

$$(\cos t + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ t)^{-m} = \frac{1}{(\cos t + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ t)^{m}}$$

ma per quanto si è trovato nell' ipotesi di m intero, e positivo

$$\frac{1}{(\cos t + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ t)^{m}} = \frac{1}{\cos mt + \sqrt{-1}\,\text{sen}\ mt} = \cos mt - \sqrt{-1}\ \text{sen}\ mt$$

e per conseguenza

$$(\cos t + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ t)^{-m} = \cos mt - \sqrt{-1}\ \text{sen}\ mt$$

In generale chiamando a un numero qualunque irrazionale, si concluderà per l'analogia

$$(\cos t + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ t)^{a} = \cos a\,t + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ at$$

la quale come si scorgerà dal seguente parag. sussiste per valori positivi di $\cos t$.

20.° Si riprenda ora il valore dell'arco

$$t = n\pi + \text{arc tang}\ \frac{b}{a}$$

ove n sarà un numero intero positivo: o negativo, e nel-

l'ipotesi che sia pari si potrà fare

$$t = \pm 2\,k\pi + \text{arc. tang}\,\frac{b}{a}$$

d'onde cos t avrà un valore positivo, nell'ipotesi di n impari si avrà

$$t = \pm (2k + 1)\,\pi + \text{arc. tang}\,\frac{b}{a}$$

e quindi cos t negativo; in qualunque caso dovrà sussistere la formola

$$\frac{\cos t}{a} = \frac{\text{sen}\, t}{b} = \frac{1}{r}$$

per cui ponendo

$$\tau = \text{arc tang}\,\frac{b}{a}$$

e supposto τ compreso fra $\frac{\pi}{2}$, e $-\frac{\pi}{2}$ si ha

$$t = n\pi + \tau$$

dunque se a è positivo

$$a + b\sqrt{-1} = r\left(\cos(\tau \pm 2k\pi) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,(\tau \pm 2k\pi)\right)$$

e se a sia negativo

$$a + b\sqrt{-1} = r\left(\cos(\tau \pm (2k+1)\,\pi) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,(\tau \pm (2k+1)\,\pi)\right)$$

Ambedue l'espressioni si decompongono in altre per le formole dei seni, e coseni delle somme e differenze di archi, e per la prima sarà evidentemente

$$a + b\sqrt{-1} = r\,(\cos\tau + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\tau)\,(\cos 2k\pi \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,2k\pi)$$

e per la seconda

$$a+b\sqrt{-1}=r(\cos\tau+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\tau)\left(\cos(2k+1)\pi\pm\text{sen}\,(2k+1)\,\pi\sqrt{-1}\right)$$

mai dai valori delle linee trigonometriche

$$\text{sen}\,2k\pi=\text{sen}\,(2k+1)\,\pi=0\,,\quad \cos 2k\pi=1\,,\quad \cos(2k+1)\pi=-1$$

dunque in fine per a positivo

$$a+b\sqrt{-1}=r(\cos\tau+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\tau)$$

e per a negativo

$$a+b\sqrt{-1}=-r(\cos\tau+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\tau)$$

Queste ultime formole giustificano la condizione enunciata alla fine del precedente parag. per una potenza irrazionale dell'espressione immaginaria di modulo eguale all'unità.

Nell'analisi algebrica si dimostra che una funzione qualunque semplice, o composta è sempre riducibile alla forma $A+B\sqrt{-1}$. Non potendoci trattenere nello sviluppo di queste importanti riduzioni; ci limiteremo soltanto nei seguenti parag. alla considerazione di quei casi che sono collegati con la teoria dei limiti verso i quali convergono l'espressioni immaginarie.

21. Una quantità immaginaria dicesi infinitesima, se infinitesime sieno le variabili α, β con le quali si compone, in modo che

$$\lim\,(\alpha+\beta\sqrt{-1})=0$$

racchiude necessariamente

$$\lim\alpha=0\,,\qquad \lim\beta=0$$

per le quali anche il modulo r convergerà verso il medesimo limite, ossia

$$\lim r = o$$

All'opposto l'argomento t rimane di valore finito mentre ponendosi sotto la forma indeterminata

$$\lim \tang t = \lim \frac{\beta}{\alpha} = \frac{o}{o}$$

se si chiami τ l' angolo corrispondente a questo limite si dedurrà semplicemente

$$\tang \tau = \lim \frac{\beta}{\alpha}$$

Ciò posto diremo che spesse volte i limiti verso i quali convergono l'espressioni variabili immaginarie si presentano sotto una forma indeterminata, e contuttociò non mancano dei particolari artifizi, per mezzo dei quali si arriva ai veri valori di questi limiti, tali sarebbero

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{\alpha + \beta\sqrt{-1}}, \ (1 + \alpha + \beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{-1}}}$$

che per valori nulli di α, e β si trasformano in

$$\frac{o}{o} \qquad 1^{\pm\infty}$$

e dei quali ci occuperemo a cominciar dal secondo.

Prendendo un limite già cognito, coll'infinitesimo α reale come si stabilì al parag. 14, cioè

$$\lim (1 + \alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = e^x$$

Si potrà senza alterarne il valore sostituire αx in vece della x, e si trova egualmente

$$\lim (1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = e^x$$

Questa formola che sussiste per x reale si potrà estendere per l'immaginaria $x\sqrt{-1}$, purchè il limite del primo membro serva per indicare il senso da annettersi alla notazione $e^{x\sqrt{-1}}$, ed allora avremo

$$\lim (1 + \alpha x \sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha}} = e^{x\sqrt{-1}}$$

e fuori del limite scriveremo

$$(1 + \alpha x \sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha}} = e^{x\sqrt{-1}} + I$$

I rappresenta un infinitesimo da svanire con α.

Se ora si sostituisca $\alpha\sqrt{-1}$ invece di α, ed $\frac{x}{\sqrt{-1}}$, in luogo della x, l'infinitesimo I seguiterà a svanire per $\alpha = 0$, quindi passando ai limiti dopo queste sostituzioni otterremo

$$\lim. (1 + \alpha x \sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha\sqrt{-1}}} = e^x$$

e ponendo $x = 1$ si riduce a

$$\lim (1 + \alpha \sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha\sqrt{-1}}} = e$$

Questa formola dimostra che se invece della α reale si sostituisca l'immaginaria $\alpha\sqrt{-1}$, il limite dell' indicato binomio converge sempre verso la base dei logaritmi iperbolici.

Supponiamo adesso che l'immaginaria risulti dalle due parti α, e $\beta\sqrt{-1}$, in questo caso è facile il vedere che il trinomio

$$1+\alpha+\beta\sqrt{-1}=(1+\alpha)\left(1+\frac{\beta}{1+\alpha}\sqrt{-1}\right)$$

porgerà col porre l'infinitesimo reale

$$\frac{\beta}{1+\alpha}=\theta$$

la trasformata

$$(1+\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}(1+\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}$$

Ora i fattori del secondo membro si potranno rappresentare per

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}=\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1+\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1}}}$$

$$(1+\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}=\left((1+\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\theta\sqrt{-1}}}\right)^{\frac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1}}{(1+\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1})(1+\alpha)}}$$

Passando ai limiti col fare $\alpha=o$, $\beta=o$, e ponendo per brevità

$$s=\lim\frac{\beta}{\alpha}$$

ed avvertendo che per valori reali di α, e θ

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e=\lim(1+\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\theta\sqrt{-1}}}$$

si dedurrà

$$\lim\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}=e^{\frac{1}{1+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

$$\lim\,(1+\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}=e^{\frac{\varepsilon\sqrt{-1}}{1+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

quindi il nuovo limite che si cerca sarà

$$\lim\,(1+\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}=e^{\frac{1}{1+\varepsilon\sqrt{-1}}}\,.\,e^{\frac{\varepsilon\sqrt{-1}}{1+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

la quale si riduce evidentemente a

$$\lim\,(1+\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}=e$$

come si ha nel caso della variabile reale. Al medesimo risultato saremmo giunti facendo uso immediatamente del modulo, e dell'argomento dell'espressione immaginaria $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

22. Le precedenti ricerche possono anche generalizzarsi nel modo seguente. Si riprenda la formola

$$\lim\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}=e^{x}$$

ove x rappresenta una quantità qualunque reale, ed α un infinitesimo parimenti reale: l'indicata formola sussiste quando in luogo delle α, ed x si pongono l'immaginarie

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}\,,\qquad x+y\sqrt{-1}$$

ed infatti da una prima sostituzione, verrà

$$1+(\alpha+\beta\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})=1+\alpha x-\beta y+(\alpha y+\beta x)\sqrt{-1}$$

nella quale ponendo per brevità

$$\alpha x - \beta y = \theta_1\,, \quad \frac{\alpha y + \beta x}{1 + \alpha x - \beta y} = \theta$$

si ottiene

$$1 + (\alpha + \beta\sqrt{-1})(x + y\sqrt{-1}) = (1 + \theta_1)(1 + \theta\sqrt{-1})$$

Le nuove variabili θ, θ_1 sono evidentemente due infinitesimi reali, e con queste sostituzioni il noto binomio si trasforma in

$$\left(1 + (\alpha + \beta\sqrt{-1})(x + y\sqrt{-1})\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}$$

$$= (1 + \theta_1)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}(1 + \theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}$$

Ora i fattori del secondo membro si potranno rappresentare per

$$\left\{(1+\theta_1)^{\frac{1}{\theta_1}}\right\}^{\frac{\theta_1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = \left\{(1+\theta_1)^{\frac{1}{\theta_1}}\right\}^{\frac{\alpha x - \beta y}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}$$

$$\left\{(1 + \theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\theta\sqrt{-1}}}\right\}^{\frac{\theta\sqrt{-1}}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}$$

$$= \left\{(1 + \theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\theta\sqrt{-1}}}\right\}^{\frac{(\alpha y + \beta x)\sqrt{-1}}{(1 + \alpha x - \beta y)(\alpha + \beta\sqrt{-1})}}$$

Dividendo il numeratore, e denominatore degli esponenti

per α, e passando ai limiti, col fare secondo il consueto

$$\varepsilon = \lim \frac{\beta}{\alpha}$$

si avrà

$$\lim (1 + \theta_1)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = e^{\frac{x - \varepsilon y}{1+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

$$\lim (1 + \theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = e^{\frac{(y + \varepsilon x)\sqrt{-1}}{1 + \varepsilon\sqrt{-1}}}$$

dunque dal prodotto di questi limiti otterremo l' indicato limite del binomio, cioè

$$\lim\left(1+(\alpha+\beta\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = e^{\frac{x-\varepsilon y+(y+\varepsilon x)\sqrt{-1}}{1+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

o ciò che torna lo stesso

$$\lim\left(1 + (\alpha + \beta\sqrt{-1})(x + y\sqrt{-1})\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = e^{x+y\sqrt{-1}}$$

come ci eravamo proposti al principio di questo parag.

Più generalmente ancora se μ, e ν sieno due infinitesimi immaginari, e della forma

$$\mu = \alpha + \beta\sqrt{-1}\,, \qquad \nu = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

e per $\varphi(\mu)$, $\psi(\nu)$ due funzioni infinitesime, da svanire per $\mu = 0$, $\nu = 0$, e per X, Y due altre quantità qualunque finite reali od immaginarie, sarà sempre facile trovare il limite verso il quale converge il binomio

$$\left(1 + X\varphi(\mu)\right)^{\frac{Y}{\psi(\nu)}}$$

mentre avendosi identicamente

$$\left(1+X\varphi(\mu)\right)^{\frac{Y}{\psi(\nu)}}=\left(1+X\varphi(\mu)\right)^{\frac{1}{\varphi(\mu)}\cdot\frac{Y\varphi(\mu)}{\psi(\nu)}}$$

se si ponga

$$\varepsilon=\lim\frac{\varphi(\mu)}{\psi(\nu)}$$

troveremo

$$\lim\left(1+X\varphi(\mu)\right)^{\frac{Y}{\psi(\nu)}}=e^{\varepsilon XY}$$

e siccome dalle precedenti teorie abbiamo

$$\lim\left(1+\varepsilon XY\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}=e^{\varepsilon XY}$$

così riuscirà l'eguaglianza

$$\lim\left(1+X\varphi(\mu)\right)^{\frac{Y}{\psi(\nu)}}=\lim\left(1+\varepsilon XY\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

Se in un qualche caso particolare si avesse

$$X=1,\quad Y=1\quad\text{ed}\quad\varepsilon=1$$

si ottiene per valori o reali, ed immaginari di μ, e ν

$$\lim\left(1+\varphi(\mu)\right)^{\frac{1}{\psi(\nu)}}=\lim\left(1+\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}=e$$

Così per esempio supponendo $\mu=\nu$, ed insieme

$$\varphi(\mu)=\log(1+\mu),\quad\psi(\nu)=\psi(\mu)=\mu$$

si deduce

$$\lim\left(1+\log\left(1+\mu\right)\right)^{\frac{1}{\mu}}=e$$

Nello stesso modo per valori reali di μ, e ν, e scegliendo

$$\varphi(\mu)=\operatorname{sen}\mu \qquad \psi(\mu)=\psi(\nu)=\mu$$

si ha

$$\lim\left(1+\operatorname{sen}\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}=e$$

Questi risultati sono d'accordo con quanto abbiamo detto al parag. 16 sugli diversi ordini degli infinitesimi.

23. Per la determinazione del limite verso il quale converge il rapporto del seno all'arco nel caso della variabile immaginaria, cercheremo prima il limite del binomio (*)

$$\left(1+\alpha x\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

per valori piccolissimi di α. Sia m un numero convergente verso l'infinito e pongasi

$$\alpha=\frac{1}{m}$$

ed insieme il binomio

$$1+\frac{x}{m}\sqrt{-1}=r\left(\cos t+\sqrt{-1}\operatorname{sen}t\right)$$

si avrà per il modulo, e l'argomento

$$r=\left(1+\frac{x^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \operatorname{tang}t=\frac{x}{m}$$

(*) Cauchy Résumès Analytiques. Turin 1833.

Quindi come già è cognito

$$\left(1+\frac{x}{m}\sqrt{-1}\right)^m = r^m\,(\cos mt + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ mt)$$

Ora è facile il vedere che

$$\lim r^m = \lim\left\{\left(1+\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2}\right\}^{\frac{1}{2m}} = e^{x^2\lim\frac{1}{2m}} = 1$$

$$\lim\frac{\text{tang}\ t}{t} = 1 = \lim\frac{x}{mt}$$

d'onde

$$x = mt$$

Con questi valori il significato dell'esponenziale immaginario $e^{x\sqrt{-1}}$ verrà definito dalla formola

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ x$$

la quale è rimarcabile, ed è di continuo uso in tutti i rami dell'analisi matematica : offre nel medesimo tempo la riduzione dell'immaginario $e^{x\sqrt{-1}}$ alla forma $A+B\sqrt{-1}$, e si rende facilissima la riduzione per mezzo di questa di tutte le altre funzioni : il modulo della medesima è l'unità, per cui un'espressione immaginaria avente l'unità per modulo si potrà sempre rimpiazzare dall' esponenziale immaginario $e^{x\sqrt{-1}}$: di più si può mettere sotto una forma commodissima qualunque espressione immaginaria $a+b\sqrt{-1}$, mentre ritenendo per r il modulo, e per t l'argomento, sarà

$$a+b\sqrt{-1} = r\,(\cos t + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ t) = re^{t\sqrt{-1}}$$

Mediante l' ottenuta riduzione di $e^{x\sqrt{-1}}$ si aumentano le risorse dell'analisi col rappresentare per una lettera unica l'espressioni immaginarie: è importante poi di osservare che sussiste per valori reali, od immaginari della x. Pongasi nella medesima $-x$ in luogo della x, coesisteranno le due equazioni

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, x, \quad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, x$$

dalle quali per via della somma, e della differenza ricaviamo

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \mathrm{sen}\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Nel caso della x immaginaria, i secondi membri serviranno a rappresentare il significato dell'espressioni simboliche

$$\cos(\alpha + \beta\sqrt{-1}), \quad \mathrm{sen}(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

le quali per mezzo degli antecedenti valori di $\cos x$, $\mathrm{sen}\, x$, si ridurranno facilmente ad

$$\cos(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\cos\alpha - \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha\sqrt{-1}$$

$$\mathrm{sen}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}\cos\alpha\sqrt{-1}$$

Ritenendo la x immaginaria si faccia

$$e^{2x\sqrt{-1}} - 1 = \theta, \quad \text{ossia} \quad 2x\sqrt{-1} = \log(1+\theta)$$

avremo

$$\frac{\mathrm{sen}\, x}{x} = \frac{1}{(1+\theta)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\log(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}}$$

θ rappresenta evidentemente un' infinitesimo, o reale od immaginario, e siccome in ambedue le circostanze

$$\lim \log (1 + \theta)^{\frac{1}{\theta}} = \log e = 1$$

così stabiliremo in generale per $x = \alpha + \beta \sqrt{-1}$

$$\lim \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = 1$$

come accade nel caso della variabile reale. Inoltre dall'equazione che porge il rapporto del seno all'arco, passando dai logaritmi ai numeri, si ottiene reciprocamente

$$(1 + \theta)^{\frac{1}{\theta}} = e^{\frac{x}{(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}} \operatorname{sen} x}}$$

e nei limiti

$$\lim (1 + \theta)^{\frac{1}{\theta}} = e^{\lim \frac{x}{\operatorname{sen} x}}$$

la quale dà una dipendenza fra i limiti delle due espressioni che ci eravamo proposti; l' infinitesimo θ diviene reale per $\alpha = 0$, ed immaginario per $\beta = 0$. I risultati ai quali siam giunti nella ricerca dei limiti ottenuti nei precedenti parag., si possono anche trovare con l'immediata riduzione dell' espressioni immaginarie alla forma $A + B\sqrt{-1}$, come può vedersi in una mia Memoria pubblicata nel 1841 (*). Porremo termine alla seconda parte dei nostri preliminari col fare un cenno sulla convergenza o divergenza delle serie immaginarie.

(*) Giornale arcadico tom. 87.

24.° Se i termini

$$u_0\,,\ u_1\,,\ u_2\,.\,.\,.\,.\,.\ u_{n-1}\,,\,.\,.\,.$$

sono immaginari, e della forma

$$u_0 = v_0 + w_0\sqrt{-1}\ ,\ u_1 = v_1 + w_1\sqrt{-1},\ \ldots$$

$$u_{n-1} = v_{n-1} + w_{n-1}\sqrt{-1}\ \ldots$$

allora la somma s_n sarà composta di un sistema di termini reali, ed immaginari, vale a dire

$$s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} + (w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1})\sqrt{-1}$$

La serie in proposito per valori infinitamente grandi del numero n, si dirà convergente, o divergente se le due serie

$$v_0\,,\ v_1\,,\ v_2\,.\,.\,.\,.\ v_{n-1}\,,\,.\,.\,.\,.$$

$$w_0\,,\ w_1\,,\ w_2\,.\,.\,.\,.\ w_{n-1}\,,\,.\,.\,.\,.$$

saranno esse o convergenti, o divergenti; di più rappresentati per $\rho_0\,,\ \rho_1\,,\ \rho_2\,.\,.\,.\ \rho_{n-1}$ i *moduli*, e per $\theta_0\,,\ \theta_1\,,\ \theta_2\,.\,.\,.\ \theta_{n-1}$ gli *argomenti* si avrà

$$\rho_0\,(\cos\theta_0 + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta_0)\ ,\quad \rho_1\,(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$$

$$\ldots\ \rho_{n-1}\,(\cos\theta_{n-1} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta_{n-1})$$

o più semplicemente

$$\rho_0\,e^{\theta_0\sqrt{-1}}\ ,\quad \rho_1\,e^{\theta_1\sqrt{-1}}\ ,\quad \ldots\ \rho_{n-1}\,e^{\theta_{n-1}\sqrt{-1}}$$

e siccome i valori dei seni e coseni degli archi reali sono compresi fra 1, e 0, o fra -1, e 0, così i termini

$$u_0\,,\ u_1\,,\ u_2\,.\,.\,.\ u_{n-1}$$

formeranno una serie convergente o divergente se convergente, o divergente sia la serie dei moduli reali

$$\rho_0, \ \rho_1, \ \rho_2 \dots \rho_{n-1} \dots$$

dunque se per valori infinitamente grandi di n il limite del rapporto

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$$

sarà minore, o maggiore dell'unità, la serie immaginaria sarà convergente, o divergente, in questo modo il criterio che si richiede per riconoscere la convergenza, o divergenza di una serie immaginaria vien ricondotto al criterio delle serie reali. Per fare una applicazione si riprenda una formola del parag. 14, e che serve allo sviluppo dell'esponenziale e^x, cioè

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

e sostituendoci $x\sqrt{-1}$ invece delle x si avrà con facilità

$$e^{x\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} \dots\right) + \left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \dots\right)\sqrt{-1}$$

I termini immaginari di questa serie saranno

$$1 + x\sqrt{-1}, -\frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1}, \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\sqrt{-1}$$

dei quali i respettivi moduli per n pari sono

$$\sqrt{1+x^2}, \ \frac{x^2}{1.2}\sqrt{1+\frac{x^2}{3^2}}, \ \frac{x^4}{1.2.3.4}\sqrt{1+\frac{x^2}{5^2}}, \dots$$

$$\frac{x^n}{1.2.3..n}\sqrt{1+\frac{x^2}{(n+1)^2}}, \ \frac{x^{n+2}}{1.2.3\dots n+2}\sqrt{1+\frac{x^2}{(n+3)^2}}, \dots$$

Ora il rapporto di due moduli consecutivi rappresentati da

$$\rho_0 , \rho_2 , \rho_4 \ldots \rho_n , \rho_{n+2} , \ldots$$

è in generale

$$\frac{\rho_{n+2}}{\rho_n} = \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} \sqrt{\frac{1 + \frac{x^2}{(n+3)^2}}{1 + \frac{x^2}{(n+1)^2}}}$$

e passando ai limiti coll'aumentare n

$$\lim \frac{\rho_{n+2}}{\rho_n} = \lim \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} < 1$$

dunque la proposta serie immaginaria è convergente. Si porrà fine col riportare le formole che servono a sviluppare i seni, e coseni secondo le potenze ascendenti dell'arco, ed infatti paragonando lo sviluppo di $e^{x\sqrt{-1}}$ con la trovata espressione

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \operatorname{sen} x$$

deduciamo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

Le serie dei secondi membri sono convergenti come è facile vederlo dal criterio stabilito nelle precedenti ricerche.

CALCOLO DIFFERENZIALE

Derivate, e differenziali delle funzioni di una sola variabile.

25.° Stabilito tutto ciò che riguarda la natura delle quantità variabili, e costanti, dei limiti, degli infinitesimi, e delle diverse specie di funzioni veniamo ad esporre i principii del Calcolo differenziale.

Se

$$y = f(x)$$

rappresenti una funzione continua entro due dati limlti della variabile x, si potrà alla medesima indipendente x attribuire un dato incremento h finito anche esso od infinitesimo, in ambedue i casi il corrispondente incremento della y sarà

$$f(x+h) - f(x)$$

L'incremento h della x si denoti con il simbolo Δx, ed il corrispondente incremento della y si noti con Δy, avremo la formola

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

e dividendo il primo, e secondo membro per Δx sarà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ora se gl'incrementi Δx, Δy sono infinitesimi converge-

ranno verso il limite zero, ed il loro rapporto quantunque si presenti sotto la forma indeterminata di $\frac{0}{0}$, contuttociò convergerà verso una quantità finita, ed indipendente da $h = \Delta x$, e che generalmente sarà diversa da zero, in modo che il limite del rapporto

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

per l'annullamento di Δx è una nuova funzione della x, e che con speciali operazioni deve ricavarsi da $f(x) = y$ questa nuova funzione della x denotiamola per $f'(x)$, od anche per y', e la chiameremo *derivata* della $f(x)$; così potremo sostituire

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y'$$

Si è convenuto di chiamare *differenziali* delle variabili x, y, e notarli per i simboli dx, dy due quantità finite, e variabili, e di tal natura, che il loro rapporto sia rigorosamente eguale al limite del rapporto degli incrementi infinitamente piccoli della funzione e della variabile indipendente, od in altri termini che il loro rapporto sia eguale all'*ultima ragione* degli incrementi infinitesimi Δy, Δx, vale a dire

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Questa formola ci dice ancora, che il rapporto dei differenziali è sempre eguale alla funzione prima derivata, e siccome si ha necessariamente

$$dy = df(x) = f'(x)\, dx$$

così diremo che il differenziale della funzione è eguale alla sua funzione prima derivata, moltiplicata per il differenziale della variabile indipendente. L'operazione che ci conduce a questo si chiama *differenziazione*, come si chiama *differenziare*, il determinare questi differenziali.

26.° La ricerca della funzione prima derivata, e della differenza della funzione, può presentarsi sotto un'altra forma, che può essere utile in qualche circostanza. Pongasi infatti

$$X = x + \Delta x\,, \qquad Y = y + \Delta y$$

per cui coesistano le equazioni

$$y = f(x) \qquad Y = f(X)$$

è evidente che la differenza della funzione sarà

$$Y - y = f(X) - f(x)$$

ed insieme il rapporto delle differenze

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{f(X) - f(x)}{X - x}$$

Ognun vede che ponendo nel secondo membro $X = x$, e per conseguenza $Y = y$, risulterà

$$\lim \frac{Y - y}{X - x} = f'(x) = \lim \frac{f(X) - f(x)}{X - x}$$

Da tutto ciò possiamo dedurre che chiamando I una quantità infinitamente piccola, e che abbia la proprietà di svanire simultaneamente a Δx, Δy, sarà fuori del limite

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + I = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

dalla quale si ottiene

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x\ (f'(x)+\mathrm{I})$$

od anche sostituendo X, Y invece delle $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, avremo

$$\mathrm{Y}-y=(\mathrm{X}-x)(f'(x)+\mathrm{I})$$

Prima di venire all'attuale differenziazione delle funzioni non mancheremo di notare, che dall'equazione

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

si deduce essere i differenziali dx, dy prossimamente proporzionali agli incrementi Δx, Δy, d'onde chiamando α, H, K tre quantità infinitesime, faremo conformemente a quanto si è stabilito nel parag. 16

$$\Delta x=\alpha\,(dx+\mathrm{K}),\quad \Delta y=\alpha\,(dy+\mathrm{H})$$

dalle quali

$$\frac{\Delta x}{\alpha}=dx+\mathrm{K},\quad \frac{\Delta y}{\alpha}=dy+\mathrm{H}$$

e si verificherà separatamente

$$dx=\lim\frac{\Delta x}{\alpha},\quad dy=\lim\frac{\Delta y}{\alpha}$$

e simultaneamente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy+\mathrm{H}}{dx+\mathrm{K}}$$

ove passando ai limiti torna l'equazione da cui siam partiti: i differenziali adunque delle variabili non sono altro che limiti di rapporti di quantità infinitesime ridotte

al medesimo ordine di grandezza: tali sono Δx, α nel differenziale della x, e Δy, α nel differenziale della y; quest'ultimo, mediante la formola

$$dy = \lim \frac{\Delta y}{\alpha} = \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\alpha}$$

è funzione lineare di dx, quando eseguita la ricerca dei limiti si sostituisca dx in vece di $\lim \frac{\Delta x}{\alpha}$, o ciò che torna lo stesso sarà eguale al prodotto della funzione derivata in dx.

27. Sarà bene qui di osservare, che chiamando a una costante, le due funzioni

$$f(x) \;, \quad \mathrm{f}(x) = a + f(x)$$

ammettono una medesima derivata, e per conseguenza un medesimo differenziale, mentre nella seconda

$$\Delta \mathrm{f}(x) = a + f(x+\Delta x) - (a + f(x)) = \Delta f(x)$$

per cui dividendo per Δx, e passando ai limiti, si ottiene

$$\mathrm{f}'(x) = f'(x) \text{, e quindi} \qquad d\,\mathrm{f}(x) = d f(x)$$

Per le due funzioni poi

$$f(x) \;, \quad \mathrm{f}(x) = a - f(x)$$

avremo con egual facilità

$$\mathrm{f}'(x) = -f'(x) \;, \quad d\mathrm{f}(x) = -\,df(x)$$

e perciò le costanti le quali sono indipendenti dalle funzioni a cui sono unite per somma, o per sottrazione svaniscono nella differenziazione: ritenendo per a una costante si consideri la funzione

$$\mathrm{f}(x) = a f(x)$$

dedurremo

$$\Delta af(x) = a\,(f(x) + \Delta x) - af(x) = a\Delta f(x)$$

d'onde

$$\mathrm{d}af(x) = a\,\mathrm{d}f(x)$$

ossia il differenziale di una funzione che trovasi moltiplicata per una costante è eguale al prodotto della costante nel differenziale della funzione.

28.° La divisione, che si è fatta delle funzioni in semplici, e composte, conduce naturalmente alla determinazione dei differenziali delle prime, e per fare una completa applicazione del metodo dei limiti otterremo anche i differenziali di tutte le funzioni trigonometriche indipendentemente dalle semplici del medesimo genere. Riassumendo le funzioni di già enumerate al parag. 11 si tratterà di determinarne i differenziali; le funzioni semplici sono

$$a + x,\ a - x\ ,\ ax\ ,\ \frac{a}{x}\ ,\quad x^a\ ,\ a^x,\ \mathrm{Log}\,x,\ \log x$$

$$\mathrm{sen}x\ ,\quad \cos x\ ;\quad \mathrm{arc\,sen}x\ ,\quad \mathrm{arc\,cos}x$$

quindi ritenendo per h l'incremento della variabile indipendente, troveremo per

$$y = a + x\ ,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a + x + h - (a + x)}{h} = 1$$

e nel limite sì per la derivata che per il differenziale

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = 1\ ,\qquad \mathrm{d}\,(a + x) = \mathrm{d}x$$

Per la seconda

$$y = a - x\ ,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a - x - h - (a - x)}{h} = -1$$

e nel limite

$$\frac{dy}{dx} = y' = -1\,, \qquad d(a - x) = -dx$$

Per la terza

$$y = ax\,, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+h) - ax}{h} = a$$

e passando ai limiti

$$\frac{dy}{dx} = y' = a \qquad d\,ax = a\,d\,x$$

Per la quarta

$$y = \frac{a}{x}\,, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+h} - \frac{a}{x}}{h} = -\frac{a}{x(x+h)}$$

e nel limite per $h = o$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{a}{x^2} \qquad d\frac{a}{x} = -\frac{a\,d\,x}{x^2}$$

Ognun vede che i differenziali di queste quattro funzioni semplici s' accordano con quanto si è osservato nel precedente parag. sopra le costanti contenute nelle funzioni.

29.° Per la potenza x^a, ove a sia un numero qualunque reale avremo

$$y = x^a\,, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^a - x^a}{h}$$

Per conoscere il limite verso il quale converge il secondo membro di quest'ultima formola si ponga

$$h = \varepsilon x\,, \quad \text{ed} \quad \frac{(1+\varepsilon)^a - 1}{\varepsilon} = \text{H}$$

sarà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+\varepsilon)^a - 1}{\varepsilon} x^{a-1}$$

e la questione si riduce alla ricerca del limite di H per valori nulli di ε. Ora dal valore di H si ha

$$\left((1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^a = \left((1+\varepsilon\,\mathrm{H})^{\frac{1}{\varepsilon \mathrm{H}}}\right)^{\mathrm{H}}$$

quindi prendendo i logaritmi Neperiani

$$a \log (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \mathrm{H} \log (1+\varepsilon\,\mathrm{H})^{\frac{1}{\varepsilon \mathrm{H}}}$$

e siccome per valori nulli di ε

$$\lim \log (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 = \lim \log (1+\varepsilon\,\mathrm{H})^{\frac{1}{\varepsilon \mathrm{H}}}$$

così dedurremo

$$\lim \mathrm{H} = \lim \frac{(1+\varepsilon)^a - 1}{\varepsilon} = a$$

dunque in fine

$$\frac{dy}{dx} = y' = ax^{a-1}\,, \qquad d\,x^a = ax^{a-1}\,dx$$

Se il numero a sia irrazionale converrà che sia positiva la x, onde non si presenti sotto una forma immaginaria la derivata della x^a. Per la funzione esponenziale a^x, si trova

$$y = a^x, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{(a^h - 1)}{h}$$

Poniamo nel secondo membro

$$a^h - 1 = \varepsilon \;, \qquad \text{ovvero} \qquad h = \frac{\log(1+\varepsilon)}{\log a}$$

otterremo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log a}{\log(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}} a^x$$

e passando ai limiti per valori nulli di h, o di ε, sarà

$$\frac{dy}{dx} = y' = \log a\, a^x \;, \qquad d a^x = \log a .\, a^x\, dx$$

Che se di più fosse $a = e$, allora per

$$y = e^x \,, \quad \frac{dy}{dx} = y' = e^x \,, \quad d e^x = e^x\, dx$$

Nello stesso modo per la funzione logaritmica

$$y = \text{Log}\, x \,, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

Facendo

$$\frac{h}{x} = \varepsilon \,, \qquad \text{od} \qquad h = \varepsilon x$$

si trova con gran facilità

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Log}\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}}{x}$$

E riflettendo che per valori nulli di h, o di ε

$$\lim \text{Log}\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \text{Log}\, e$$

si avrà

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\text{Log}\, e}{x}\ , \quad d\,\text{Log}\, x = \text{Log}\, e\, \frac{dx}{x}$$

Assumendo la base dei logaritmi iperbolici otteniamo per

$$y = \log x, \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x}, \quad d\log x = \frac{dx}{x}$$

Dai resultati ottenuti nella ricerca dei precedenti differenziali si possono con facilità enunciare delle regole, che per brevità omettiamo.

30.° Veniamo alla derivazione, e differenziazione delle funzioni trigonometriche, e sarà primieramente per

$$y = \text{sen}\, x\ , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen}\,(x + h) - \text{sen}\, x}{h} = \frac{\text{sen}\, \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} \cos (x + \tfrac{1}{2} h)$$

Passando ai limiti per valori nulli di h avremo

$$\frac{dy}{dx} = y' = \cos x, \quad d\text{sen}\, x = \cos x\, dx = \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{2})\, dx$$

Nella stessa guisa per il coseno

$$y = \cos x\ , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos (x + h) - \cos x}{h} = - \frac{\text{sen}\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2} h}\, \text{sen}\,(x + \tfrac{1}{2}h)$$

dunque ai limiti

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\, \text{sen}\, x, \quad d\cos x = -\, \text{sen}\, x\, dx = \cos (x + \frac{\pi}{2}) dx$$

È importante qui di osservare che mediante la relazione

$$\cos x = \text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x)$$

si troverebbe

$$d \cos x = d \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) d \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

o ciò che torna lo stesso

$$d \cos x = - \operatorname{sen} x \, dx$$

La differenziazione delle funzioni trigonometriche inverse si può facilmente eseguire come mostreremo in seguito, per mezzo della differenziazione delle dirette, ma per fare una completa applicazione del metodo dei limiti, porremo secondo il consueto per

$$y = \operatorname{arc\,sen} x \, , \; \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{arc\,sen} (x + h) - \operatorname{arc\,sen} x}{h}$$

e riducendo la differenza di due archi in un arco solo per mezzo della nota formola

$$\operatorname{arc\,sen} A - \operatorname{arc\,sen} B = \operatorname{arc\,sen} \left(A\sqrt{1 - B^2} - B\sqrt{1 - A^2} \right)$$

avremo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{arc\,sen} \left[(x + h)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - (x + h)^2} \right]}{h}$$

Pongasi adesso

$$(x + h) \sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - (x + h)^2} = H, \quad \text{ed} \quad \frac{H}{h} = K$$

è evidente che per $h = o$ si verifica $H = o$ per cui

$$\lim \frac{\operatorname{arc\,sen} H}{H} = 1$$

perciò si dedurrà la ricerca del limite a

$$\lim \frac{\text{arc sen H}}{h} = \lim \frac{\text{H}}{h} \cdot \frac{\text{arc sen H}}{\text{H}} = \lim \text{K}$$

Ora il valore di K ci somministra

$$x\sqrt{1-(x+h)^2} = (x+h)\sqrt{1-x^2} - h\text{K}$$

Elevando ambedue i membri al quadrato riducendo, e dividendo per h, si avrà

$$0 = 2x + h - 2\text{K}(x+h)\sqrt{1-x^2} + h\text{K}^2$$

e passando ai limiti, deduciamo in fine

$$\lim \text{K} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

dunque

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \text{ arc sen } x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nello stesso modo per la funzione

$$y = \text{arc cos } x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc cos }(x+h) - \text{arc cos } x}{h}$$

Riducendo la differenza degli archi ad arco di un dato seno si trova

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\text{arc sen }[(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}]}{h} = -\frac{\text{arc sen H}}{h}$$

La quantità H ha qui il medesimo significato che in antecedenza, per cui

$$\lim \frac{\text{H}}{h} = \lim \text{K} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e risulterà

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \text{ arc cos } x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Questi due esempi possono servire per conoscere gli artifizi da usarsi nella ricerca di alcuni limiti, mentre vedremo con qual facilità si possono trovare questi due ultimi differenziali dopo di aver stabilito le regole per la differenziazione di una *funzione* di *funzione*: all' ultima ottenuta formola saremmo facilmente giunti, osservando che

$$\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen } x$$

e perciò

$$d \text{ arc cos } x = -d \text{ arc sen } x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

31.° I differenziali adunque di tutte le funzioni semplici si potranno porre sotto il seguente prospetto

$$d(a+x) = dx, \quad d(a-x) = -dx$$

$$dax = adx, \quad d\frac{a}{x} = -\frac{adx}{x^2}$$

$$dx^a = ax^{a-1}\,dx, \quad da^x = \log a\, a^x\, dx$$

$$de^x = e^x\, dx, \quad d\,\text{Log}\, x = \text{Log}\, e \frac{dx}{x}, \quad d \log x = \frac{dx}{x}$$

$$d \text{ sen } x = \cos x\, dx = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$d \cos x = -\text{sen } x\, dx = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$d \text{ arc sen } x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \text{ arc cos } x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Se a tutti questi differenziali vogliamo che corrispondano valori reali delle funzioni, converrà supporre la x positiva in. Log$x$, log$x$; e nella potenza x^a dovrà a rappresentare una frazione di denominatore pari, od un numero irrazionale. Il differenziale della funzione semplice $\frac{a}{x}$ è compreso in x^a, per l'esponente $a = -1$.

La differenziazione delle altre funzioni trigonometriche può dipendere dalle regole che daremo per la differenziazione delle funzioni composte; ma per mostrare sempre più l'utilità del metodo dei limiti, indagheremo direttamente i differenziali di queste.

32.° Cominciando pertanto dalla tangente trigonometrica sarà per

$$y = \tang x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\tang (x + h) - \tang x}{h}.$$

e sostituendo la tangente della somma, e riducendo si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\tang h\,(1 + \tang^2 x)}{h\,(1 + \tang x \tang h)}$$

Ma nel passare ai limiti

$$\lim \frac{\tang h}{h} = 1$$

dunque

$$\frac{dy}{dx} = y' = 1 + \tang^2 x, \quad d \tang x = (1 + \tang^2 x)\, dx$$

ovvero

$$d \tang x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Operazioni del tutto simili alle precedenti si fanno

per la cotagente, ed avremo per

$$y = \cot x, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$

ove sostituendoci la cotangente della somma, riducendo, ed osservando che

$$\lim h \cot h = \lim \frac{h}{\operatorname{tang} h} = 1$$

verrà

$$\frac{dy}{dx} = y' = -(1 + \cot^2 x), \quad d \cot x = -(1 + \cot^2 x)\, dx$$

o più brevemente

$$d \cot x = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Proseguendo all'altre linee trigonometriche sarà per

$$y = \sec x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

Trasformando questa espressione con le solite formole trigonometriche si ridurrà a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h \operatorname{sen}(x + \frac{1}{2} h)}{h \cos x \cos(x+h)}$$

quindi nel limite si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}, \qquad d \sec x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$$

ovvero

$$d \sec x = d\, x \sec x \sqrt{\sec^2 x - 1}$$

Per la cosecante

$$y = \operatorname{cosec} x\,,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h}$$

e per le consuete trasformazioni, e riduzioni troviamo nel limite

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,,\quad d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$

od anche per la sostituzione della cosecante

$$d \operatorname{cosec} x = -dx \operatorname{cosec} x \sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}$$

Aggiungeremo i differenziali del seno verso, e coseno verso; ed essendo

$$\operatorname{sen} v\, x = 1 - \cos x \quad,\quad \cos v\, x = 1 - \operatorname{sen} x$$

avremo per il parag. 27

$$d \operatorname{sen} v\, x = \operatorname{sen} x\, dx \quad,\quad d \cos v\, x = -\cos x\, dx.$$

33.° Veniamo ora alla differenziazione delle altre funzioni trigonometriche inverse, e sarà per un'arco di data tangente

$$y = \operatorname{arc\,tang} x\,,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{arc\,tang}(x+h) - \operatorname{arc\,tang} x}{h}$$

Dalla riduzione della differenza di archi in un'arco unico, abbiamo generalmente

$$\operatorname{arc\,tang} A - \operatorname{arc\,tang} B = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{A-B}{1+AB}\right)$$

quindi riuscirà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc tang} H}{h}, \quad \text{ed} \quad H = \frac{h}{1 + x(x + h)}$$

La quantità H svanisce per $h = 0$, per cui osservando che

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{H}{h} \; \frac{\text{arc tang}\, H}{H}$$

ed insieme nel limite

$$\lim \frac{\text{arc tang}\, H}{H} = 1, \quad \lim \frac{H}{h} = \frac{1}{1 + x^2}$$

verrà

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad d \,\text{arc tang}\, x = \frac{dx}{1 + x^2}$$

Nello stesso modo per

$$y = \text{arc cot}\, x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc cot}\,(x + h) - \text{arc cot}\, x}{h}$$

Riducendo la differenza degli archi ad arco di tangente, verrà come sopra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\text{arc tang}\, H}{h}$$

d'onde nel limite

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{dx}{1 + x^2}, \quad d \,\text{arc cot}\, x = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

Quest'ultima potea immediatamente dedursi dalla relazione

$$\text{arc cot}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\, x$$

Con i medesimi artifizi troveremo per

$$y = \text{arc sec}\, x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc sec}\,(x+h) - \text{arc sec}\, x}{h}$$

Trasformando gli archi di secante in archi di seni per mezzo delle formole

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}, \quad \text{sen}\, A = \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 A}}$$

dedurremo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc sen}\sqrt{1 - \frac{1}{(x+h)^2}} - \text{arc sen}\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{h}$$

Riducendo adesso la differenza degli archi, e posto per brevità

$$H = \frac{1}{x}\sqrt{1 - \frac{1}{(x+h)^2}} - \frac{1}{x+h}\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}, \quad \text{ed} \quad \frac{H}{h} = K$$

si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc sen}\, H}{h} = K.\frac{\text{arc sen}\, H}{H}$$

la quantità H si annulla per $h = o$, per cui

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim K$$

Ora il valore di K somministra evidentemente

$$Kh + \frac{1}{x+h}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{(x+h)^2}}$$

ed elevando al quadrato, e dividendo per h si ottiene dopo brevi riduzioni

$$2x + h = 2Kx\,(x+h)\sqrt{x^2-1} + h\,K^2 x^2 (x+h)^2$$

d'onde

$$\lim K = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

e per conseguenza

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,, \qquad d \operatorname{arc\,sec} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Finalmento per

$$y = \operatorname{arc\,cosec} x\,, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{arc\,cosec}(x+h) - \operatorname{arc\,cosec} x}{h}$$

Riducendo gli archi di cosecante ad archi di seno, con le consuete trasformazioni si troverà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{arc\,sen} H}{h}$$

La quantità H ha il medesimo significato che in antecedenza, per cui

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,, \qquad d \operatorname{arc\,cosec} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

In seguito mostreremo alcune formole generali che com-

prenderanno i differenziali ottenuti in questi due ultimi parag. delle funzioni trigonometriche.

34.° Per la differenziazione di una funzione di funzione, dovrà sussistere simultaneamente per

$$z = F(y) \;,\quad y = f(x)$$

la duplice differenza

$$\Delta z = F(y + \Delta y) - F(y) \;,\quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

quindi ritenendo che i differenziali dx, dy, dz sieno i limiti dei rapporti

$$\frac{\Delta x}{\alpha}, \quad \frac{\Delta y}{\alpha}, \quad \frac{\Delta z}{\alpha}$$

α essendo un'infinitesimo egualmente che Δx, Δy, Δz, si avrà identicamente

$$\frac{\Delta z}{\alpha} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\alpha}$$

quindi nel limite

$$(m) \;\;\ldots\ldots\;\; dz = d\,F(y) = F'(y)\,dy$$

e che si trasforma in

$$d\,F(f(x)) = F'(f(x))f'(x)\,dx$$

dalla quale per la derivata z' riguardo alla x deduciamo

$$z' = F'(f(x))f'(x)$$

La formola (m) ci dice che il differenziale di una funzione di una sola variabile rimane lo stesso, quando anche la variabile cessi di essere indipendente, e per conseguenza sostituendo per $F(y)$ le diverse funzioni sem-

plici, riuscirà in un modo del tutto simile, come nel parag. 31.

$$\left\{\begin{array}{l} d\,(a+y)=dy\,,\quad d\,(a-y)=-dy\,,\ d\,ay=a dy \\ d\,\dfrac{a}{y}=-\dfrac{a dy}{y^2}\,,\quad dy^a=ay^{a-1}\,dy \\ d\,a^y=\log a\,a^y\,dy\,,\ d e^y=e^y\,dy\,, \\ d\,\mathrm{Log}\,y=\mathrm{Log}\,e\,\dfrac{dy}{y}\,,\ d\log y=\dfrac{dy}{y} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} d\,\mathrm{sen}\,y=\cos y\,dy=\mathrm{sen}\,(y+\dfrac{\pi}{2})\,dy \\ d\cos y=-\,\mathrm{sen}\,y\,dy=\cos(y+\dfrac{\pi}{2})\,dy \\ d\,\mathrm{arc\,sen}\,y=\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,,\ d\,\mathrm{arc}\cos y=-\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \end{array}\right.$$

Veniamo ora ad alcune applicazioni delle precedenti formole. Pongasi nella quarta $a=1$ e successivamente si prenda $y=\cos x$, $y=\mathrm{sen}\,x$, avremo evidentemente

$$d\sec x=-\frac{d\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{\cos^2 x}$$

$$d\,\mathrm{cosec}\,x=-\frac{d\,\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}^2\,x}=-\frac{\cos x\,dx}{\mathrm{sen}^2\,x}$$

come già si era trovato direttamente. Nella quinta si supponga successivamente

$y=\log x$, $y=\mathrm{sen}\,x$, $y=a^2-x^2$, ed $a=\dfrac{1}{2}$

si dedurrà con gran facilità

$$d(\log x)^m = m(\log x)^{m-1}\frac{dx}{x}$$

$$d\,\text{sen}^m x = m\,\text{sen}^{m-1} x \cos x\, dx$$

$$d(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Nella stessa maniera si faccia nella sesta $y = c^x$, e nella settima $y = e^x$, avremo

$$da^{c^x} = \log a \log c\, a^{c^x} c^x\, dx\,, \quad de^{e^x} = e^{e^x} e^x\, dx\,.$$

Abbiasi nella nona $y = \text{sen}x$, $y = \cos x$, si troverà

$$d\log \text{sen}\, x = \frac{d\,\text{sen}\, x}{\text{sen}\, x} = \frac{dx}{\text{tang}\, x}$$

$$d\log\cos x = \frac{d\cos x}{\cos x} = -\frac{dx}{\cot x}$$

Sia nella decima, ed undecima $y = ax^m$ verrà

$$d\,\text{sen}\, ax^m = a\,mx^{m-1}\cos ax^m\, dx$$

$$d\cos ax^m = -a\,mx^{m-1}\,\text{sen}\, ax^m\, dx$$

Infine nelle due ultime sia $y = \frac{1}{x}$, otterremo

$$d\,\text{arc sen}\,\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = d\,\text{arc cosec}\, x$$

$$d\,\text{arc cos}\,\frac{1}{x} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = d\,\text{arc sec}\, x$$

come già si era trovato di sopra.

35.° La formola (m) somministrando il differenziale di una funzione, quando anche la variabile non sia indipendente, potrà immediatamente applicarsi alla differenziazione di tutte le funzioni trigonometriche inverse; ed infatti supponendo successivamente

$$y = \text{arc sen } x\,,\quad y = \text{arc cos } x\,,\quad y = \text{arc tang } x$$

$$y = \text{arc cot } x\,,\quad y = \text{arc sec } x\,,\quad y = \text{arc cosec } x$$

avremo reciprocamente

$$x = \text{sen } y\,,\quad x = \cos y\,,\quad x = \text{tang } y$$

$$x = \cot y\,,\quad x = \sec y\,,\quad x = \text{cosec } y$$

quindi dalla formola (m), e dai differenziali delle funzioni trigonometriche dirette dedurremo

$$dx = \cos y\, dy = dy \sqrt{1 - x^2}$$
$$dx = -\text{sen } y\, dy = -dy \sqrt{1 - x^2}$$
$$dx = dy\,(1 + \text{tang}^2 y) = dy\,(1 + x^2)$$
$$dx = -dy\,(1 + \cot^2 y) = -dy\,(1 + x^2)$$
$$dx = dy \sec y \sqrt{\sec^2 y - 1} = dy\, x \sqrt{x^2 - 1}$$
$$dx = -dy\, \text{cosec } y \sqrt{\text{cosec}^2 y - 1} = -dy\, x \sqrt{x^2 - 1}$$

dalle quali evidentemente

$$d \text{ arc sen } x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}\,,\qquad d \text{ arc cos } x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$d \text{ arc tang } x = \frac{dx}{1 + x^2}\,,\qquad d \text{ arc cot } x = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

$$d \text{ arc sec } x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,,\qquad d \text{ arc cosec } x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Questi risultati coincidono con quanto abbiamo stabilito di sopra dietro altri principii. Prima d'intraprendere la risoluzione di altre questioni avvertiremo che i differenziali di alcune funzioni semplici si potrebbero far dipendere dal differenziale logaritmico di qualsiasi base; per mostrare un qualche esempio, supponiamo

$$y = x^a \quad , \quad y = a^x$$

e prendendo i logaritmi, si ha

$$\text{Log}\, y = a \,\text{Log}\, x \quad , \quad \text{Log}\, y = x \,\text{Log}\, a$$

Differenziando in qualunque sistema di logaritmi avremo per la formola (m)

$$\frac{dy}{y} = a\frac{dx}{x} \,, \quad \text{Log}\, e \frac{dy}{y} = \text{Log}\, a\, dx$$

d'onde

$$d\,x^a = a x^{a-1}\, dx \,, \quad d\,a^x = \frac{\text{Log}\, a}{\text{Log}\, e} a^x\, dx$$

Che se per $u = F(x)$, $v = f(x)$, fosse data la funzione

$$y = u^v$$

prendendo i logaritmi si ha allora

$$\text{Log}\, y = v \,\text{Log}\, u$$

d'onde differenziando, e sostituendo

$$dy = d\, u^v = \frac{u^v}{\text{Log}\, e}\, d.v\text{Log}\, u$$

Non si può eseguire la differenziazione nel secondo

membro se non si stabiliscono le regole per la differenziazione delle funzioni che risultano da un prodotto di variabili. La risoluzione di questo problema unitamente ad analoghe ricerche formerà l'oggetto dei seguenti parag.

Sulla derivata, e sul differenziale di una somma, di un prodotto, di un quoto di funzioni di una sola variabile indipendente: differenziazione di una funzione di funzioni di una sola variabile: differenziazione delle funzioni immaginarie, e delle funzioni di una variabile immaginaria.

36.° Data la somma di funzioni

$$y = u + v + w + \dots$$

ove sia per brevità

$$u = F(x) \ , \quad v = f(x) \ , \quad w = \varphi(x) \ , \dots$$

si avrà evidentemente

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \dots$$

la quale divisa per Δx, e passando ai limiti si ridurrà all'eguaglianza delle derivate

$$y' = u' + v' + w' + \dots$$

la quale se si moltiplichi per dx, diverrà

$$dy = du + dv + dw + \dots$$

Questo risultato si sarebbe potuto ottenere dal valore di Δy, riflettendo, che i differenziali delle $y, u, v, w \ldots$ non sono altro che i limiti dei rapporti

$$\frac{\Delta y}{\alpha}, \frac{\Delta u}{\alpha}, \frac{\Delta v}{\alpha}, \frac{\Delta w}{\alpha}, \ldots$$

ove α rappresenta il consueto infinitesimo ausiliare: da tutto ciò si ricava, che la differenza finita, la derivata, ed il differenziale di una somma di funzioni, eguaglia la somma delle differenze finite, delle derivate, e dei differenziali delle funzioni medesime. Così per esempio,

$$y = \mathrm{A}x^m + \mathrm{B} \log \operatorname{sen} x + \mathrm{C}\, e^{\sqrt{x}}$$

darà

$$dy = m\, \mathrm{A}x^{m-1}\, dx + \mathrm{B} \frac{dx}{\operatorname{tang} x} + \frac{\mathrm{C}\, e^{\sqrt{x}}\, dx}{2\sqrt{x}}$$

Sia il prodotto

$$y = u\, v\, w \ldots$$

e le u, v, w abbiano il significato poco fa indicato, e per semplicità supporremo le funzioni ridotte a due, in modo da essere

$$y = u\, v$$

è evidente che l'incremento della y, sarà

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

nella quale fatte le riduzioni, e divisa per Δx, e passando ai limiti si troverà per la derivata

$$y' = u\, v' + v\, u'$$

d'onde il differenziale

$$d\, u\, v = u\, d\, v + v\, d\, u$$

Questa formola si otterrebbe eziandio immediatamente da Δy, dividendo per α, e riflettendo alle consuete equazioni dei limiti

$$dy = \lim \frac{\Delta y}{\alpha}, \quad du = \lim \frac{\Delta u}{\alpha}, \quad dv = \lim \frac{\Delta v}{\alpha}$$

ed insieme che

$$\lim \frac{\Delta u \, \Delta v}{\alpha} = 0$$

Nello stesso modo per un numero qualunque di funzioni si trova

$$d\,u\,v\,w\,.\,. = v\,w\,.\,.\,d\,u + u\,w\,.\,.\,d\,v + u\,v\,.\,.\,d\,w\,\ldots + \ldots$$

Cioè il differenziale di un prodotto di funzioni è eguale alla somma dei differenziali particolari di ciascuna funzione considerando le altre come costanti.

L'esposto metodo si applica con la medesima facilità ad un rapporto di funzioni, e si ricava per

$$y = \frac{u}{v}, \qquad \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

Qui anche eseguite le riduzioni, dividendo per Δx, e passando ai limiti, abbiamo la derivata

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Il differenziale si ha, o dal moltiplicare per dx, o dal dividere Δy per α, e passare ai limiti, ed in ambedue i modi si trova

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,d\,u - u\,d\,v}{v^2}$$

Ciò potea riportarsi al differenziale del prodotto, avvertendo che

$$d\frac{u}{v} = d\,u\,v^{-1} = v^{-1}\,d\,u + u\,d\,v^{-1}$$

la quale per la teoria esposta al parag. 34 si riduce alla penultima stabilita formola. Se la frazione si presentasse sotto la forma

$$y = \frac{u\,u_1\,u_2\,...}{v\,v_1\,v_2\,...}$$

allora con i soliti processi di operazioni si ha

$$d\frac{u\,u_1\,u_2\,....}{v\,v_1\,v_2\,....} = \frac{v\,v_1\,v_2\,..\,d.u\,u_1\,u_2\,.. - u\,u_1\,u_2\,..\,d.v\,v_1\,v_2\,...}{v^2\;v_1^2\;v_2^2}$$

e sostituiremo nel medesimo tempo

$$d.u\,u_1\,u_2\,.. = u_1\,u_2\,..\,d\,u + u\,u_2\,..\,d\,u_1 + u\,u_1\,..\,du_2$$

$$d.v\,v_1\,v_2\,.. = v_1\,v_2\,..\,d\,v + v\,v_2\,..\,d\,v_1 + v\,v_1\,..\,d\,v_2$$

Da tutto ciò si deduce che il differenziale di una frazione è eguale al prodotto del denominatore per il differenziale del numeratore, diminuito del prodotto del numeratore per il differenziale del denominatore, ed il tutto diviso per il quadrato del medesimo denominatore. Un' applicazione di queste ultime formole l' abbiamo nelle funzioni trigonometriche

$$\text{tang}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{1}{\text{tang}x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{cosec}\,x = \frac{1}{\text{sen}\,x}$$

e si ottiene

$$\mathrm{d}\,\mathrm{tang}\,x = \mathrm{d}\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} = \frac{\cos x\,\mathrm{d}\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{d}\cot x = \mathrm{d}\frac{1}{\mathrm{tang}x} = -\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tang}\,x}{\mathrm{tang}^2 x} = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}^2 x}$$

e con la medesima facilità

$$\mathrm{d}\sec x = \mathrm{d}\frac{1}{\cos x} = -\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{d}\,\mathrm{cosec}\,x = \mathrm{d}\frac{1}{\mathrm{sen}\,x} = -\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}^2 x} = -\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}^2 x}$$

come già si era dimostrato con altri metodi. Agli esposti esempi ne aggiungeremo uno, dove più regole sono incluse per la differenziazione, cioè supporremo

$$y = x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

e si avrà

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = 2\mathrm{d}x\sqrt{1+x^2}$$

37.° Veniamo ora a stabilire una formola generale per il differenziale di una funzione di funzioni di una sola variabile, e sia

$$y = \mathrm{F}(u, v, w, \ldots)$$

dove le u, v, w, ... sono come sopra, funzioni qualunque della variabile x, quindi si avrà

$$\Delta y = \mathrm{F}(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w\,..) - \mathrm{F}(u, v, w\,..)$$

Il differenziale della medesima y, sarà dato da

$$dy = \lim \frac{\Delta y}{\alpha} = \lim \frac{F(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w\,..) - F(u,\ v,\ w...)}{\alpha}$$

Se si considerasse variabile solamente una qualunque delle funzioni, u, v, w ... allora i parziali incrementi delle y saranno

$$F(u+\Delta u, v, w..) - F(u, v, w..)\,,\ F(u, v+\Delta v, w..) - F(u, v, w..)$$

$$F(u,\ v,\ w+\Delta w\,..) - F(u,\ v,\ w\,..)\,,\ \ldots.$$

e si potrebbero notare per

$$\Delta_u y\ ,\ \ \Delta_v y\ ,\ \ \Delta_w y\ ,\ \ldots$$

e perciò anche i particolari differenziali della stessa y riguardo alle u, v, w ... si scriveranno con le notazioni

$$d_u y = \lim \frac{\Delta_u y}{\alpha},\quad d_v y = \lim \frac{\Delta_v y}{\alpha}\ ,\quad d_w y = \lim \frac{\Delta_w y}{\alpha}$$

Infine le derivate particolari le rappresenteremo per

$$F_u'(u,\ v,\ w\,..)\,,\ F_v'(u,\ v,\ w\,..)\,;\ F_w'(u,\ v,\ w\,..)\,,\ \ldots.$$

in modo da essere

$$d_u y = F_u'(u,\ v,\ w\,..)du\,,\ d_v y = F_v'(u,\ v,\ w\,..)dv$$

$$d_w y = F_w'(u,\ v,\ w\,..)dw\,,\ \ldots..$$

Si riprenda ora la differenza particolare

$$F(u+\Delta u,\ v,\ w\,..) - F(u,\ v,\ w\,..)$$

e si faccia variare nel primo termine la funzione v, sarà per la differenza di quella funzione

$$F(u + \Delta u, v + \Delta v, w \,..) - F(u + \Delta u, v, w \,..)$$

Nello stesso variando la w, .. nel primo termine di questa differenza, otterremo

$$F(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w, ..) - F(u+\Delta u, v+\Delta v, w, ..);$$

perciò risulteranno le differenze

$$F(u + \Delta u, v, w \,..) - F(u, v, w \,..)$$

$$F(u + \Delta u, v + \Delta v, w \,..) - F(u + \Delta u, v, w \,..)$$

$$F(u+\Delta u, v+\Delta v, w + \Delta w \,..) - F(u+\Delta u, v + \Delta v, w \,..)$$

. . . .

ciascuna delle quali se ha per limite zero, converrà che anche la lor somma

$$F(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w, ..) - F(u, v, w, ..)$$

converga al medesimo limite per valori nulli di $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, e di Δx, e per conseguenza

$$dy = \lim \frac{\Delta y}{\alpha} = \lim \frac{F(u+\Delta u, v, w \,..) - F(u, v, w \,..)}{\alpha}$$

$$+ \lim \frac{F(u + \Delta u, v + \Delta v, w \,..) - F(u + \Delta u, v, w \,..)}{\alpha}$$

$$+ \lim \frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w..) - F(u+\Delta u, v+\Delta v, w..)}{\alpha}$$

$+ \ldots\ldots\ldots$

Ma è facile il vedere che i limiti del secondo membro

coincidono con i limiti verso quali convergono i rapporti

$$\frac{\Delta_u y}{\alpha}, \quad \frac{\Delta_v y}{\alpha}, \quad \frac{\Delta_w y}{\alpha}, \dots$$

dunque

$$dy = \lim \frac{\Delta y}{\alpha} = \lim \frac{\Delta_u y}{\alpha} + \lim \frac{\Delta_v y}{\alpha} + \lim \frac{\Delta_w y}{\alpha} + \dots\dots$$

o semplicemente

$$dy = d_u y + d_v y + d_w y + \dots$$

Questa formola ci dice che il differenziale di una funzione di funzioni di una sola variabile indipendente è eguale alla somma dei differenziali parziali relativi a ciascuna funzione. Così supponendo successivamente

$$y = F(u, v \dots) = uv\ ; \ y = F(u, v \dots) = \frac{u}{v}$$

si ha dalla prima

$$d_u y = v du\ , \quad d_v y = u dv\ , \dots$$

e dalla seconda

$$d_u y = \frac{du}{v}, \qquad d_v y = -\frac{u dv}{v^2}$$

d' onde si ricaveranno le formole di già trovate per i differenziali di un prodotto, o di un quoto. Sia di più

$$y = F(u, v) = u^v$$

è evidente che i differenziali particolari, sono

$$d_u y = v u^{v-1} du\ , \quad d_v y = u^v \log u dv$$

per cui nel sistema dei logaritmi iperbolici

$$d\,u^v = u^v\,(v\,\frac{du}{u} + \log u\,dv)$$

È importante poi di osservare, che l'ottenuto differenziale di u^v, potrebbe dipendere immediatamente dalla regola dei differenziali di un prodotto; ed infatti ritenendo la base iperbolica, si ha identicamente

$$u^v = e^{\log u^v} = e^{v \log u}$$

quindi per le formole generali del parag. 34

$$d\,u^v = d\,e^{v\log u} = e^{v\log u}\,d.v\log u$$

dove essendo

$$d.v\log u = v\,\frac{du}{u} + \log u\,dv$$

tornerà la formola richiesta. Se in un caso particolare sia

$$u = v = x\,, \quad \text{od anche} \quad u = x\,,\ v = \frac{1}{x}$$

si dedurranno l'espressioni differenziali

$$d\,x^x = x^x\,(1 + \log x)\,dx, \quad d\,x^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1 - \log x}{x^2}\right)dx.$$

L'osservazione che abbiamo qui fatta per il differenziale di u^v, sarà d'accordo a quanto si è detto alla fine del parag. 35. Termineremo coll'indicare che differenziando le tre specie di funzioni

$$uv\,, \quad \frac{u}{v}\,, \quad u^v$$

per mezzo del differenziale logaritmico, saremmo ricondotti alla regola per la differenziazione di una somma di funzioni.

38.° Tutti i risultati ottenuti nei precedenti parag. per le funzioni reali si estendono con facilità alle funzioni immaginarie; di fatti se la solita funzione

$$y = f(x)$$

si decomponga in due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$ reali, ed ove la seconda sia il coefficiente di $\sqrt{-1}$, sarà

$$y = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}$$

dalla quale si deduce la differenza

$$\Delta y = \Delta f(x) = \Delta\varphi(x) + \Delta\psi(x)\sqrt{-1}$$

Ora i limiti delle espressioni immaginarie risultano dalla somma dei limiti verso i quali convergono i due termini delle medesime d'onde dividendo per Δx, o per α, sarà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}$$

$$\frac{\Delta y}{\alpha} = \frac{\Delta f(x)}{\alpha} = \frac{\Delta\varphi(x)}{\alpha} + \frac{\Delta\psi(x)}{\alpha}\sqrt{-1}$$

e perciò ai limiti

$$y' = f'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}$$

$$dy = df(x) = d\varphi(x) + d\psi(x)\sqrt{-1}$$

ed anche

$$d(\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}) = d\varphi(x) + d\psi(x)\sqrt{-1}$$

Ognun vede che la regola per la differenziazione delle funzioni immaginarie coincide con quelle di già stabilite per le funzioni reali. Per mostrare una qualche applicazione; sia x, la variabile reale indipendente, ed a un numero qualunque reale irrazionale, e si abbiano a differenziare le tre funzioni immaginarie

$$e^{x\sqrt{-1}}, \quad (x)^a, \quad \log(-x)$$

nella seconda di queste si dovrà supporre la x negativa; dalla prima abbiamo

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \operatorname{sen} x$$

e differenziando sarà

$$d\, e^{x\sqrt{-1}} = -\operatorname{sen} x\, dx + \sqrt{-1} \cos x\, dx$$

ovvero

$$d\, e^{x\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\,(\cos x + \sqrt{-1} \operatorname{sen} x)\, dx = e^{x\sqrt{-1}}\, dx\sqrt{-1}$$

come accade nel caso dell'esponente reale. Dalla seconda espressione per x negativa si ha dalla riduzione delle espressioni immaginarie

$$(x)^a = (-x)^a\,(-1)^a$$

e siccome $(-1)^a$ porge un'infinità di valori immaginari dati dalla formola

$$(-1)^a = \cos(2k+1)a\pi \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen}(2k+1)\, a\pi$$

così differenziando risulterà

$$d\,(x)^a = -a\,(-x)^{a-1}\,(-1)^a\, dx = a\,(-x)^{a-1}\,(-1)^{a-1}\, dx$$

ovvero

$$d(x)^a = a(x)^{a-1}\, dx$$

Per la terza espressione si conosce che

$$\log(-x) = \log x \pm (2k+1)\,\pi\sqrt{-1}$$

e quindi

$$d \log (-x) = \frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x}$$

Ed in altro sistema di logaritmi si troverebbe egualmente

$$d \operatorname{Log} (x) = \operatorname{Log} e \frac{dx}{x}$$

il quale coincide con il differenziale logaritmico a variabile positiva. Sarà importante di osservare riguardo alla potenza $(x)^{\alpha}$, che non ammetterà un significato preciso, ma indeterminato egualmente che il suo differenziale per valori negativi della x.

39.° Veniamo ai differenziali delle funzioni di una variabile immaginaria: pongasi pertanto

$$z = x + y\sqrt{-1}\,, \quad \text{ed} \quad u = f(z)$$

la definizione dei differenziali dx, dy, dz, du verrà data dai limiti consueti

$$dx = \lim \frac{\Delta x}{\alpha}, \quad dy = \lim \frac{\Delta y}{\alpha}, \quad dz = \lim \frac{\Delta z}{\alpha}, \quad du = \lim \frac{\Delta u}{\alpha}$$

ove l'infinitesimo α, mantiene un valore reale; dopo questo è naturale che l'equazione

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

includerà le altre

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y \sqrt{-1}\,, \quad \lim \frac{\Delta z}{\alpha} = \lim \frac{\Delta x}{\alpha} + \lim \frac{\Delta y}{\alpha}\sqrt{-1}$$

la seconda delle quali si riduce a

$$dz = dx + dy\sqrt{-1}$$

quindi passando ai limiti si ha

$$\frac{du}{dz} = u' = f'(z) \; , \qquad d f(z) = f'(z) \, dz$$

Espressione della forma medesima che per la variabile reale. Per riconoscere poi le eccezioni alle qnali saranno soggetti i differenziali delle funzioni a variabili immaginarie, riprendiamo per poco le funzioni semplici

$$a + z, \quad a - z, \quad az, \quad \frac{a}{z}, \quad z^a, \quad a^z, \quad e^z$$

$$\text{Log}(z), \quad \log(z), \quad \text{sen}\, z, \quad \cos z$$

$$\text{arc sen}\, z, \quad \text{arc cos}\, z$$

nelle quali la variabile z, è della forma

$$z = x + y\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, t)$$

Considerando l'espressioni della forma z^a, conserveranno queste le medesime proprietà sì per valori reali che per valori immaginarii della variabile, fintantochè l'esponente ha per valore numerico un numero intero, ma queste proprietà non sussisteranno più sotto certe condizioni nel caso opposto; così per esempio ritenendo per a un numero reale frazionario, od irrazionale, si vedrà che delle tre formole

$$z^a \, z^b \, z^c \ldots = z^{a+b+c+\cdots}, \qquad z^a \, z_1^a \, z_2^a = (z \, z_1 \, z_2 \ldots)^a$$

$$(z^a)^b = z^{ab}$$

la prima sussiste unicamente, quante volte la parte reale x, della z sia positiva, la seconda, quante volte x, x_1, x_2 essendo positive la somma

$$\text{arc tang}\,\frac{y}{x} + \text{arc tang}\,\frac{y_1}{x_1} + \text{arc tang}\,\frac{y_2}{x_2} + \ldots\ldots$$

sia compresa fra i limiti $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$; la terza poi, rimanendo positiva x, il prodotto

$$a \text{ arc tang} \frac{y}{x}$$

sia compreso fra i medesimi limiti $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$. Queste avvertenze possono dedursi da quanto abbiamo stabilito nella seconda parte dei nostri preliminari, ma per un completo sviluppo può consultarsi il *corso d'Analisi* del sig. *Cauchy*, ed anche il *Calcolo differenziale* del sig. ab. *Moigno*. All'opposto le funzioni

$$a^z, \ e^z, \ \text{sen}\, z, \ \cos z$$

sono suscettibili delle medesime proprietà che a variabile reale, in modo che le formole

$$a^z a^{z_1} a^{z_2} \ldots = a^{z+z_1+z_2+\ldots}$$

$$a^z b^z c^z \ldots = (a\, b\, c \ldots)^z$$

$$\text{sen}\,(z+\omega) = \text{sen}\, z \cos \omega + \cos z\, \text{sen}\, \omega$$

$$\cos\,(z+\omega) = \cos z \cos \omega - \text{sen}\, z\, \text{sen}\, \omega$$

sussistono per valori reali, ed immaginarii di z, z_1, z_2 ... ω. Prendendo in fine le funzioni inverse

$$\text{Log}(z), \ \log(z) \qquad \text{arc sen}\, z, \ \text{arc cos}\, z$$

si vedrà che posto

$$z = x + y\sqrt{-1}, \ z_1 = x_1 + y_1\sqrt{-1}, \ z_2 = x_2 + y_2\sqrt{-1} \ldots$$

la formola

$$\text{Log}\,(z) + \text{Log}\,(z_1) + \text{Log}\,(z_2) + \ldots = \text{Log}\,(z\, z_1\, z_2 \ldots)$$

sussisterà quante volte x, x_1 x_2... essendo positive, la somma degli archi

$$\text{arc tang}\,\frac{y}{x_1}+\text{arc tang}\,\frac{y_1}{x_1}+\text{arc tang}\,\frac{y_2}{x_2}+\ldots.$$

sia compreso fra $\frac{\pi}{2}$, e $-\frac{\pi}{2}$, come anche la formola

$$\text{Log}\,(z^a)=a\,\text{Log}\,(z)$$

nel caso della x, positiva, e del prodotto

$$a\,\text{arc tang}\,\frac{y}{x}$$

compreso fra i limiti $-\frac{\pi}{2}$, e $+\frac{\pi}{2}$, ...

Per le funzioni trigonometriche inverse

$$\text{arc sen}\,z\,,\ \text{arc cos}\,z$$

supponendo in ambedue

$$\text{arc sen}\,(x+y\sqrt{-1})=\text{X}+\text{Y}\sqrt{-1}$$

$$\text{arc cos}\,(x+y\sqrt{-1})=\text{X}_1+\text{Y}_1\sqrt{-1}$$

ricaveremo reciprocamente

$$\text{sen}\,(\text{X}+\text{Y}\sqrt{-1})=x+y\sqrt{-1}$$

$$\text{cos}\,(\text{X}_1+\text{Y}_1\sqrt{-1})=x+y\sqrt{-1}$$

Se nei primi membri si sostituiscano i valori di già trovati al parag. 23, e si formino l'eguaglianze fra le quantità reali, e fra i respettivi coefficienti di $\sqrt{-1}$, otterremo le X, Y, X_1, Y_1 in funzione delle x, y; queste espressioni non sussisteranno che sotto determinate condizioni della x. I valori delle X, X_1 come può vedersi nel calcolo del sig. Cauchy dipendono da archi di

dato seno, o coseno, e quelli di Y, Y_1 da logaritmi di quantità irrazionali. Da tutto ciò che abbiamo esposto in questo parag. deduciamo, che sotto le enunciate condizioni, gli incrementi infinitamente piccoli delle funzioni di una variabile immaginaria dipenderanno dalle medesime trasformazioni, che si sono eseguite con la variabile reale; quindi i differenziali delle medesime funzioni si ridurranno alla ricerca dei limiti verso i quali convergono l'espressioni

$$\frac{\text{sen}\,(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\alpha+\beta\sqrt{-1}},\quad (1+\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}$$

por valori nulli di α, e β, ma è stato dimostrato, che questi limiti si mantengono i medesimi, che se la variabile fosse reale, e per conseguenza sotto le indicate condizioni, tutto ciò che si è trovato per i differenziali delle funzioni dai parag. 25 a 37 seguita a snssistere sia la variabile reale sia immaginaria. Noi termineremo questo parag.coll'avvertire, che i differenziali delle funzioni di una variabile immaginaria si potrebbero anche ottenere dalla differenziazione diretta dalle espressioni immaginarie che rappresentano le medesime funzioni.

Derivate e differenziali successivi delle funzioni di una sola variabile.

40.° Ritenendo che y', o $f'(x)$ esprima la funzione prima derivata dalla solita equazione

$$y=f(x)$$

il differenziale della medesima y sarà

$$dy=y'dx=f'(x)dx.$$

Ciò posto si chiamino y'', y''', y^{IV}, ... ed eguali a $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{\text{IV}}(x)$ ... altrettante funzioni della x, e che ognuna di esse venga dedotta dalla sua antecedente come $f'(x) = y'$ proviene da $y = f(x)$; le nuove funzioni y'', y''', y^{IV}... e le sue eguali $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{\text{IV}}(x)$, ... si chiameranno funzioni derivate *seconda, terza, quarta* dalla y, o dalla $f(x)$, ed in generale

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

sarà una derivata dell'ordine n$^{\text{esimo}}$. Riflettendo ora alla relazione che passa fra la funzione prima derivata, e i differenziali dx, dy vedremo che per i differenziali delle nuove funzioni derivate sussisterà

$$dy' = y''dx\,,\; dy'' = y'''dx, \ldots\; dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$$

od anche

$$dy' = f''(x)dx,\; dy'' = f'''(x)dx, \ldots\, dy^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x)dx$$

dalle quali si ottiene reciprocamente

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x),\; \frac{dy'}{dx} = y'' = f''(x),\; \frac{dy''}{dx} = y''' = f'''(x)$$

$$\ldots\ldots \quad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

Tali sarebbero i valori delle funzioni derivate di un'ordine qualunque espresse dal rapporto dei differenziali della funzione, e della variabile indipendente; ma per introdurci ai differenziali successivi si faccia la sostituzione della y' nella seconda di queste ultime formole, sarà

$$y'' = f''(x) = \frac{d\,\dfrac{dy}{dx}}{dx}$$

ove si avrà da eseguire la differenziazione sopra la frazione $\frac{dy}{dx}$, e potremo fare due ipotesi 1° di assumere dx per costante. 2° di prenderlo variabile con dy. Nel primo caso si avrebbe soltanto a differenziare dy, e per essere uniformi alla notazione si dovrebbe scrivere $d\,dy$ e che per semplicità sostituiremo l'espressione simbolica d^2y, come dx^2 per rappresentare la potenza seconda di dx, dopo ciò avremo

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Nello stesso modo per indicare il differenziale di d^2y si scriverà d^3y, e così di seguito in modo che ritenuta l'ipotesi di dx costante si ha per le funzioni derivate.

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \; \ldots \; y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

In queste formole, l'espressioni dx^2, dx^3, ... dx^n, rappresentano le successive potenze di dx e le quantità d^2y, d^3y, d^4y, ... d^ny si chiamano differenziali del secondo, del terzo ... dell'n^{esimo} ordine; e si esprimono per

$$d^2y = y''dx^2, \; d^3y = y'''dx^3, \ldots d^ny = y^{(n)}\,dx^n$$

Non così accade se anche dx, sia variabile, allora a cominciar dalla funzione derivata seconda si ha

$$y'' = f''(x) = \frac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

Così anche

$$y''' = f'''(x) = \frac{1}{dx}\,d\,\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

la quale sviluppata ci da

$$y''' = f'''(x) = \frac{dx\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}$$

e così di seguito per le altre, nelle quali tutte supponendo $d^2x = o$, $d^3x = o, \ldots$ tornano l' equazioni di sopra stabilite.

41.° Riguardo alla successiva derivazione esposta nel precedente parag. gioverà d'indicare qui un'altra notazione della quale se ne trarrà un gran partito in seguito per risolvere diverse questioni. Sieno le caratteristiche D, D^2, $D^3, \ldots D^n$ collocate a sinistra della funzione per indicare le funzioni derivate dei rispettivi ordini, come d, d^2, $d^3, \ldots d^n$ si usano per i differenziali successivi; si avrà evidentemente

$$Dy = y', \quad D^2y = y'', \quad D^3y = y''', \ldots D^ny = y^{(n)}.$$

Spesse volte per indicare a qual variabile indipendente si riferisca la derivazione, si adopreranno le caratteristiche

$$D_x, \; D_x^2, \; D_x^3, \; \ldots \; D_x^n,$$

ed allora

$$D_xy, \; D_x^2y, \; D_x^3y, \; \ldots \; D_x^ny$$

indicheranno che x è la variabile indipendente. Per mostrare una qualche applicazione dell'esposte teorie, circa la successiva derivazione supponiamo

$$y = x^m, \quad y = a^x, \quad y = e^x$$

si troverà immediatamente col prendere dx per costante

$$D^nx^m = m(m-1)(m-2) \ldots (m-(n-1))\, x^{m-n}.$$

$$D^na^x = (\log a)^n a^x, \quad D^ne^x = e^x$$

dalle quali si otterrebbero subito i rispettivi differenziali dell'ordine n; se nella prima $m = n$ si avrà

$$D^m x^m = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots 3.\,2.\,1.$$

e per $n > m$

$$D^n x^m = 0\,, \quad \text{ed insieme} \quad d^n x^m = 0$$

Per la funzione logaritmica

$$y = \log x$$

si trova con facilità

$$D \log x = \frac{1}{x}\,, \quad D^2 \log x = -\frac{1}{x^2}\,, \quad D^3 \log x = \frac{1\,.\,2}{x^3}$$

ed in generale per n impari, o pari

$$D^n \log x = \pm \frac{1.\,2.\,3\,.\,4\dots(n-1)}{x^n}$$

dalla quale evidentemente

$$d^n \log x = \pm \frac{1.\,2.\,3\,..\,(n-1)}{x^n}\, dx^n$$

Per la funzione trigonometrica

$$y = \operatorname{sen} x$$

avremo dalla successiva derivazione

$$D \operatorname{sen} x = \cos x\,, \quad D^2 \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

$$D^3 \operatorname{sen} x = -\cos x\,, \quad D^4 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

e siccome nel caso di n pari

$$\pm \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

e nel caso di n impari

$$\pm \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

così in generale

$$D^n \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

e quindi

$$d^n \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) dx^n$$

Nello stesso modo per la funzione trigonometrica

$$y = \cos x$$

si ottiene per la successiva derivazione

$$D \cos x = -\operatorname{sen} x, \quad D^2 \cos x = -\cos x$$

$$D^3 \cos x = \operatorname{sen} x, \quad D^4 \cos x = \cos x$$

e siccome per il numero n pari

$$\pm \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

e per n impari

$$\pm \operatorname{sen} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

così in tutti i casi

$$D^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

d'onde per il differenziale dell'ordine n

$$d^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) dx^n$$

In seguito mostreremo degli altri esempi per la derivazione successiva delle funzioni.

42.° Alcune volte succede che la funzione della x si presenti sotto la forma di $f(x+a)$ o di $f(ax)$, essendo a una costante, ed in ambedue i casi è sempre facile di determinare sì la derivata che il differenziale di un'ordine qualunque, in modo che per

$$y=f(x+a)$$

si ha immediatamente

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x+a)\,,\quad d^n y=f^{(n)}(x+a)\,dx^n$$

E per

$$y=f(ax)$$

si otterrebbe

$$y^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax)\,,\quad d^n y=a^n f^{(n)}(ax)\,dx^n$$

Queste due formole generali trovano fra le altre una applicazione alle funzioni

$$(x+a)^m\,,\quad e^{ax}\,,\quad \text{sen}\, ax,\ldots$$

che per brevità omettiamo di sviluppare.

Per le funzioni di funzione riprendendo le formole

$$z=F(y),\qquad y=f(x)$$

sarà

$$dz=F'(y)\,dy\,,\quad d^2z=F'(y)\,d^2y+F''(y)\,dy^2$$

$$d^3z=F'(y)\,d^3y+3F''(y)\,dy d^2y+F'''(y)\,dy^3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

ove in ciascuna si avrebbe a sostituire

$$dy=y'dx\,,\quad d^2y=y''dx^2\,,\quad d^3y=y'''dx^3,\ldots$$

e quindi si dedurranno le derivate z', z'', z''' ... riguardo alla x, cioè

$$z'=F'(y)\,y'\,,\quad z''=F'(y)\,y''+F''(y)\,y'^2$$

$$z'''=F'(y)\,y'''+3F''(y)\,y'\,y''+F'''(y)\,y'^3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

dalle quali si deducono subito i respettivi differenziali; così avendosi

$$z = e^y, \qquad \text{ed} \qquad y = \text{sen}\, x$$

si trova primieramente

$$z' = e^y\, y', \quad z'' = e^y\,(y'' + y'^2),$$
$$z''' = e^y\,(y''' + 3y'\,y'' + y'^3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

e quindi per

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\,\text{sen}\, x, \quad y''' = -\cos x, \ldots$$

si avrà in fine

$$z' = e^{\text{sen}\, x} \cos x, \quad z'' = e^{\text{sen}\, x}\,(\cos^2 x - \text{sen}\, x)$$
$$z''' = e^{\text{sen}\, x}\,(\cos^3 x - 3\text{sen}\, x \cos x - \cos x)$$

Termineremo questo parag. coll'indicare brevemente in che consista il cangiamento della variabile indipendente nei successivi differenziali, e derivate di una funzione. Nella differenziazione si è preso costante il differenziale della variabile indipendente, ed allora come abbiamo veduto nell' antecedente paragrafo 40, si esprimono molto semplicemente le derivate di un'ordine qualunque della funzione; nel caso adunque che si volesse fare un cangiamento di variabile indipendente, basterebbe in luogo dei rapporti

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4} \cdots\cdots \frac{d^ny}{dx^n}$$

sostituire

$$\frac{1}{dx}\, d\,\frac{dy}{dx}, \quad \frac{1}{dx}\, d\left(\frac{1}{dx}\, d\,\frac{dy}{dx}\right)$$
$$\frac{1}{dx}\, d\left(d\,\frac{1}{dx}\, d\,\frac{dy}{dx}\right)\cdots\cdots$$

ove si considererà variabile anche dx per poter sostituire i valori d^2x, d^3x, . . . espressi per il differenziale della nuova variabile indipendente.

43.° Le funzioni composte si differenziano successivamente per le medesime regole di già stabilite per la derivazione e differenziazione unica: così per la funzione

$$y = u + v + w + \dots .$$

si trovò per la prima derivata

$$y' = u' + v' + w' + \dots . .$$

quindi per una derivata dell'ordine n^{esimo}

$$y^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)} + w^{(n)} + \dots . .$$

e per il suo differenziale corrispondente

$$d^n y = d^n u + d^n v + d^n w + \dots .$$

Per la differenziazione, e derivazione successiva della funzione

$$y = u v w \dots .$$

si ha per le due u, v.

$$dy = vdu + udv, \quad d^2y = vd^2u + 2du\, dv + ud^2v$$

$$d^3y = vd^3u + 3dv\, d^2u + 3du\, d^2v + ud^3v$$

In questi differenziali la legge dei coefficienti, e degli ordini dei differenziali coincide con quella del binomio, e perciò per un differenziale dell'ordine n si potrà stabilire la formola generale

$$d^n uv = vd^n u + nd^{n-1}udv + \frac{n(n-1)}{2} d^{n-2}ud^2v$$

$$+ \dots . + nd^{n-1}vdu + ud^n v$$

Questi risultati si potranno mettere sotto una forma simbolica, considerando la caratteristica d come una quantità, in modo da scrivere brevemente

$$d^n uv = (d + d)^n uv$$

perchè nello sviluppo del binomio s'intendono differenziali, e non già potenze; il primo d riferendosi alla u, ed il secondo alla v o viceversa. Se il primo, e secondo membro si divida per dx^n si otterrà la derivata dell'ordine n^{esimo}, cioè

$$(uv)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)} v' + n \frac{(n-1)}{2} u^{(n-2)} v'' + ...$$

$$+ n v^{(n-1)} v' + u v^{(n)}$$

Lo sviluppo del secondo membro potrà anche rappresentarsi con una forma simbolica, qualora si adopri la caratteristica D_x per le derivate, e si avrà

$$D_x^n uv = (D_x + D_x)^n uv$$

Qui pure il primo D_x riferendolo a u ed il secondo a v. Vedremo a non molto che queste formole si verificano, se u, v, sieno anche funzioni di un numero qualunque di variabili indipendenti.

44.° Presentiamo ora delle applicazioni di qualcuna delle formole generali stabilite per la differenziazione successiva di un prodotto; così ripreso il differenziale

$$dy = y' dx$$

sarà facile di determinarne il differenziale dell' ordine n^{esimo} della y quando x cessi di essere variabile indipendente, e si otterrà la formola simbolica

$$d^n y = (d + d)^{n-1} y' dx$$

purchè nello sviluppo il primo d si riferisca ad y', ed

il secondo a dx; o reciprocamente, ed avremo

$$d^n y = dx\, d^{n-1} y' + (n-1)\, d^{n-2} y'\, d^2 x + \ldots\ldots$$

$$+ (n-1)\, d^2 y'\, d^{n-2} x + y'\, d^n x$$

Così per $n = 2, 3, 4, \ldots$ si troverà con facilità

$$d^2 y = y'' dx^2 + y' d^2 x$$

$$d^3 y = y''' dx^3 + 3y'' dx\, d^2 x + y' d^3 x$$

$$d^4 y = y^{IV} dx^4 + 6y''' dx^2\, d^2 x + 3y'' (d^2 x)^2$$

$$+ 4y'' dx\, d^3 x + y' d^4 x$$

. . . .

Prendasi

$$u = e^{rx}, \quad v = f(x)$$

si otterrà evidentemente

$$D^n e^{rx} = r^n e^{rx}$$

quindi per la derivata dell' ordine n^{esimo} del prodotto $e^{rx} f(x)$, ricaveremo la formola simbolica

$$D^n e^{rx} f(x) = e^{rx} (r + D)^n f(x)$$

quante volte nello sviluppo le caratteristiche $D, D^2, D^3 \ldots D^n$ sieno derivate di $f(x)$. Quest' ultima formola dà luogo ad un'altra della quale ne mostreremo i vantaggi nelle applicazioni ; ed infatti rappresentando per $F(D)$ una funzione intera della caratteristica D, avremo non solo

$$F(D)\, e^{rx} = F(r)\, e^{rx}$$

ma ben anche

$$F(D)\, e^{rx} f(x) = e^{rx}\, F(r + D) f(x).$$

Questa formola sussiste anche se F(D) sia frazionaria, ed allora rappresenterà integrali di un dato ordine, di espressioni differenziali.

45.° Veniamo finalmente alle funzioni immaginarie, ed alle funzioni a variabile immaginaria; per le prime essendo

$$y = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}$$

si trovò di già

$$y' = \varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}$$

quindi per una derivata qualunque

$$y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x) + \psi^{(n)}(x)\sqrt{-1}$$

e per un differenziale del medesimo ordine

$$d^n y = d^n\,\varphi(x) + d^n\,\psi(x)\sqrt{-1}$$

Con egual facilità per le seconde, si avrà

$$u = f(z), \qquad z = x + y\sqrt{-1}$$

dalle quali si trovò

$$du = f'(z)\,dz, \qquad dz = dx + dy\sqrt{-1}$$

e supponendo dz costante si trova egualmente che per la variabile reale

$$f'(z) = \frac{du}{dz}, \quad f''(z) = \frac{d^2u}{dz^2}, \; .... f^{(n)}(z) = \frac{d^nu}{dz^n}$$

Si porrà fine coll' avvertire che un cangiamento di variabile indipendente si farà col sostituire ai termini

$$\frac{du}{dz}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}, \; .\;.\;.\;.\; \frac{d^nu}{dz^n}$$

le nuove espressioni

$$\frac{1}{dz}du,\quad \frac{1}{dz}d\frac{du}{dz},\quad \frac{1}{dz}d\left(\frac{1}{dz}d\frac{du}{dz}\right),\ \ldots .$$

Sulle relazioni che passano fra le funzioni di una sola variabile, e le loro derivate, o differenziali di un dato ordine.

46.° Abbiamo fino ad ora veduto che il principale scopo del Calcolo differenziale consiste nel dedurre con date operazioni le *funzioni derivate* da un'altra funzione parimenti data. Ora una prima formola che esprime una relazione fra gli incrementi della funzione, e della variabile indipendente è come dal parag. 26

$$f(x+h)-f(x)=h\,(f'(x)+\mathrm{I})$$

ove $f(x)$, $f'(x)$ devono esser continue entro dati limiti, e la I si annulla per $h=o$. Ognun vede però che rimane incognita la forma della quantità I, e non possiamo prevalerci della riportata formola che per la ricerca della funzione prima derivata. La nuova questione che ci proponiamo di risolvere è di un grande interesse per la moltitudine delle applicazioni delle quali è suscettibile, e si aggira sulla ricerca delle relazioni che passano fra le funzioni, e le loro derivate. Crediamo però opportuno di richiamare primieramente alcune proprietà che si verificano nelle funzioni reali, e continue entro dati limiti della variabile indipendente.

47.° Una di queste proprietà è che se una funzione reale della variabile x cresce, o decresce, all'aumen-

tare, o diminuire della x, la funzione prima derivata sarà una quantità positiva, ed al contrario se ad aumenti, o decrementi della x, corrispondono decrementi, od aumenti della funzione, allora la funzione prima derivata sarà negativa, ed infatti dall'equazione ai limiti

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

si deduce che Δy, Δx, saranno del medesimo segno se all'aumentare, o diminuire della x corrispondono aumenti, e decrementi della funzione, e saranno di segno contrario, quando crescendo la x diminuisce la y, e viceversa; quindi anche nel limite gli infinitesimi Δy, Δx, conserveranno i respettivi segni, e per conseguenza la funzione prima derivata sarà positiva nel primo caso, e negativa nel secondo; così per esempio le tre funzioni

$$\frac{1}{x}, \quad \cos x, \quad (1-x)^m$$

hanno per derivate le quantità negative

$$-\frac{1}{x^2}, \quad -\operatorname{sen} x, \quad -m(1-x)^{m-1}$$

ed ognun vede che le indicate funzioni seguono una ragion reciproca della indipendente x.

Un'altra proprietà di già indicata al parag. 13 è che una funzione reale, e continua entro due dati limiti x_0 X della x, non può passare dai valori negativi ai valori positivi e viceversa se non passa per lo zero, od in altri termini deve sempre trovarsi un valore particolare della x, e compreso fra x_0, X, il quale verifichi l'equazione $f(x) = 0$; una funzione poi reale, e discontinua di una sola variabile, passa dai valori positivi ai negativi, passando per l'infinito, ossia vi sarà sempre un

valore particolare della x, che verificherà $\frac{1}{f(x)}=0$. Così le funzioni

$$\frac{1}{x}, \quad \tang x$$

passano per l'infinito quando da positive devono divenir negative per tutti i convenienti valori della x.

48.° Premesse queste due brevi riflessioni sieno $f(x)$, $F(x)$ due funzioni qualunque della x, ed x_0, $x_0+h=X$ due valori determinati della medesima x, e si formi il rapporto

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}$$

del quale se ne cerca il valore per mezzo delle derivate delle due funzioni $f(x)$, $F(x)$.

Supporremo che $F(x)$ vada costantemente variando da x_0 fino ad X per cui la derivata $F'(x)$ sarà sempre del medesimo segno, e che $f(x)$ sia continua entro i medesimi limiti x_0, X. Dopo ciò si decomponga l'intervallo $h=X-x_0$ in un numero n di elementi eguali denotati per α, ovvero chiamando $x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_{n-1}$ altrettanti valori compresi fra x_0 ed X si abbia

$$x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=\ldots=X-x_{n-1}=\alpha$$

dalle quali

$$x_1=x_0+\alpha\,,\ x_2=x_0+2\alpha, \ldots\ldots$$

$$x_{n-1}=x_0+(n-1)\,\alpha, \quad X=x_0+n\alpha$$

Se il numero n di questi elementi cresca indefinitamente, se ne diminuirà il loro valore α, allora h sarà il limite verso il quale converge il prodotto $n\alpha$, e perciò dalla somma dei rispettivi intervalli si avrà

$$X-x_0=h\,, \quad h=\lim n\alpha$$

Con questi valori il rapporto degli aumenti finiti delle due funzioni diverrà successivamente

$$\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{F(x_0+\alpha)-F(x_0)},\quad \frac{f(x_0+2\alpha)-f(x_0+\alpha)}{F(x_0+2\alpha)-F(x_0+\alpha)}$$

. . . . . .

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0+h-\alpha)}{F(x_0+h)-F(x_0+h-\alpha)}$$

Facendo la somma dei numeratori, e divisa per la somma dei denominatori, che hanno tutti il medesimo segno, si otterrà per quanto si è stabilito al parag. 15 un *medio* fra il più grande, ed il più piccolo di quei rapporti e che evidentemente coinciderà con il rapporto cercato. Ora da una prima relazione fra le funzioni, e le derivate si ha

$$f(x_0+\alpha)-f(x_0)=\alpha\,(f'(x_0)+I_1)$$
$$f(x_0+2\alpha)-f(x_0+\alpha)=\alpha(f'(x_0+\alpha)+I_2)$$
$$f(x_0+h)-f(x_0+h-\alpha)=\alpha\,(f'(x_0+h-\alpha)+I_{(n)})$$

ed insieme

$$F(x_0+\alpha)-F(x_0)=\alpha\,(F'(x_0)+I')$$
$$F(x_0+2\alpha)-F(x_0+\alpha)=\alpha\,(F'(x_0+\alpha)+I'')$$

. . . . . .

$$F(x_0+h)-F(x_0+h-\alpha)-(F'(x_0+h-\alpha)+I^{(n)})$$

quindi sarà facile il vedere che ciascun dei rapporti si potrà porre sotto la forma

$$\frac{f'(x_0)}{F'(x_0)}+H_1,\quad \frac{f'(x_0+\alpha)}{F'(x_0+\alpha)}+H_2,\ \ldots$$

$$\frac{f'(x_0+h-\alpha)}{F'(x_0+h-\alpha)}+H_{(n)}$$

la quantità H_1 H_2 ... H'_n) convergeranno verso lo zero nel medesimo tempo che α. Il rapporto in questione essendo compreso fra la più grande, e la più piccola di queste frazioni, sarà compreso fra il più grande ed il più piccolo dei limiti verso i quali convergono queste stesse frazioni, delle quali l'espressione generica sarà $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ compresa fra la più grande, e la più piccola, quando x_0 varia in un modo continuo da x_0 ad x_0+h dunque esisterà per x un valore intermedio fra questi, pei quali si verificherà l'eguaglianza del rapporto: il valore intermedio è come dal parag. 15 della forma $x_0+\theta h$, ove θ è un numero incognito >0, e <1, e concluderemo in fine

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}$$

Questa formola è il soggetto di una delle più importanti lezioni del calcolo differenziale del sig. Cauchy; ma il precedente ragionamento è stato desunto dal corso d'analisi del sig. Duhamel. La medesima formola sussiste quante volte $F'(x)$ mantenga il medesimo segno da x_0 fino ad x_0+h, ed $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ passi per tutti i valori fra il più grande, ed il più piccolo; questa seconda condizione si verifica quando $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ sia continua fra x_0 ed x_0+h; quantunque potrebbe succedere l'opposto.

49.° Veniamo ora a dedurre diverse altre formole, le quali ci saranno in seguito di una grand'utilità. Suppongasi primieramente, che per il valore particolare $x=x_0$ sia

$$f(x_0)=0, \quad F(x_0)=0$$

allora si ha solamente

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}$$

Se oltre la precedente ipotesi si aggiungesse

$$f'(x_0)=o\ ,\quad f''(x_0)=o\ ,\ \ldots\ldots\ f^{(n-1)}(x_0)=o$$
$$F'(x_0)=o\ ,\quad F''(x_0)=o\ ,\ \ldots\ldots\ F^{(n-1)}(x_0)=o$$

e che tutte queste derivate rimangano continne entro i soliti limiti unitamente alle $f^{(n)}(x)$, $F^{(n)}(x)$, allora chiamando θ', θ'', θ''', ... $\theta^{(n-1)}$ altrettanti numeri incogniti $> o$, e < 1, nei quali si verifichi

$$\theta>\theta'>\theta''>\theta'''>\ \ldots\ldots\ >\theta^{(n-1)}$$

risulterà l'eguaglianza di frazioni

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}=\frac{f''(x_0+\theta' h)}{F''(x_0+\theta h)}=\ldots=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta^{(n-1)}h)}{F^{(n)}(x_0+\theta^{(n-1)}h)}$$

quindi eguagliando la prima, e l'ultima avremo

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)}$$

essendo $\theta > o$, e < 1; in questa formola le funzioni

$$F'(x)\ ,\quad F''(x)\ ,\quad F'''(x)\ \ldots\ldots\ F^{(n-1)}(x)\ ,\quad F^{(n)}(x)$$

devono mantenere il medesimo segno nell' intervallo $h=X-x_0$. Se le funzioni derivate si annullano soltanto per $x=x_0$: la precedente equazione dovrà rimpiazzarsi da

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)}$$

Nel caso particolare di $n = 1$ tornerà la formola di sopra stabilita. Pongasi in quest'ultima

$$F(x) = (x - x_0)^n$$

otterremo le derivate

$$F'(x) = n\,(x - x_0)^{n-1}\,,\quad F''(x) = n\,(n-1)\,(x - x_0)^{n-2}$$

$$\ldots\ldots\quad F^{(n)}(x) = 1.\,2.\,3.\ldots n$$

le quali per i valori di $x > o$ si mantengono tutte del medesimo segno, ed insieme si verifica

$$F(x_0) = o\,,\quad F'(x_0) = o\,,\quad F''(x_0) = o \ldots F^{(n-1)}(x_0) = o$$

$$F^{(n)}(x_0) = 1.\,2.\,3..\,n$$

e siccome

$$F^{(n)}(x_0 + \theta h) = 1.\,2.\,3..\,n\,,\quad F(x_0 + h) = h^n$$

così avremo la nuova formola

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{1.\,2.\,3\,..\,n}\, f^{(n)}(x_0 + \theta h)$$

per la quale si renderà superfluo avvertire che oltre la continuità delle funzioni, e delle derivate suppone anche

$$f'(x_0) = o\,,\quad f''(x_0) = o\,.\,.\,.\; f^{(n-1)}(x_0) = o$$

Nell'ipotesi di $n = 1$, potendo x_0 rappresentare una variabile qualunque, sarà

$$f(x + h) - f(x) = h\, f'(x + \theta h)$$

Questa formola ci somministra il valore della I che si ha nell'equazione di già cognita

$$f(x + h) - f(x) = h\,(\,f'(x) + \mathrm{I}\,)$$

cioè

$$\mathrm{I} = f'(x + \theta h) - f'(x) = \Delta\, f'(x)$$

quando θh sia l'incremento della x. Tali sono le principali formole per esprimere le relazioni che esistono fra le funzioni, e le derivate. A tutte queste ne aggiungeremo delle altre, che con gran facilità si deducono dall' antecedenti, e che ci saranno in seguito molto utili per la risoluzione di diverse questioni.

50.° Pongasi infatti $x_0 = o$ nell'ultima formola del parag. 48, e si muti h in x, sarà dalla medesima

$$\frac{f(x) - f(o)}{F(x) - F(o)} = \frac{f'(\theta x)}{F'(\theta x)}$$

Qui le funzioni saranno continue a partir da $x = o$, ed $F'(x)$ dovrà conservare il medesimo segno a cominciar dal medesimo valore. Se oltre l'enunciate condizioni abbiasi ancora

$$f(o) = o\,, \quad F(o) = o$$

risulterà semplicemente

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\theta x)}{F'(\theta x)}$$

Alla precedente ipotesi aggiungiamo

$$f'(o) = o\,, \quad f''(o) = o \;\ldots\ldots\; f^{(n-1)}(o) = o$$

$$F'(o) = o\,, \quad F''(o) = o \;\ldots\ldots\; F^{(n-1)}(o) = o$$

avremo la serie di formole

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\theta x)}{F'(\theta x)} = \frac{f''(\theta' x)}{F''(\theta' x)} = \ldots = \frac{f^{(n)}(\theta^{(n-1)} x)}{F^{(n)}(\theta^{(n-1)} x)}$$

ove come sopra

$$\theta > \theta' > \theta'' > \;\ldots\ldots\; > \theta^{(n-1)}$$

e nel medesimo tempo, ciascun dei numeri incogniti

$\theta, \theta', \theta'' \ldots \theta^{(n-1)} > o$, e < 1; quindi sarà in generale

$$\frac{f(r)}{F(x)} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{F^{(n)}(\theta x)}$$

In questa formola si suppone la continuità delle funzioni, e delle loro derivate fino all' ordine n^{esimo} a partir da $x = o$, e le $F'(x)$, $F''(x) \ldots F^{(n-1)}(x)$, $F^{(n)}(x)$ mantengono sempre il medesimo segno per tutta la serie dei valori dei quali è suscettibile la x. Se per $x = o$, le due funzioni f(o), F(o) mantengono un valore finito, allora converrà all'ultima formola sostituire

$$\frac{f(r) - f(o)}{F(r) - F(o)} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{F^{(n)}(\theta x)}$$

Nel caso in cui fosse $n = 1$ tornano le formole di già trovate. Pongasi ora

$$F(x) = x^n$$

si avrà evidentemente

$$F(o) = o\,, \quad F'(o) = o\,, \; \ldots \; F^{(n-1)}(o) = o$$

$$F^{(n)}(r) = 1.\,2.\,3 \ldots n = F^{(n)}(\theta x)$$

dunque l'ultima formola ci porgerà

$$f(x) - f(o) = \frac{x^n}{1.\,2.\,3 \ldots n} f^{(n)}(\theta x)$$

Se fosse anche $f(o) = o$, avremo semplicemente

$$f(x) = \frac{x^n}{1.\,2.\,3 \ldots n} f^{(n)}(\theta x)$$

Queste due ultime formole per $n = 1$ si riducono ad

$$f(x) - f(o) = x\,f'(\theta x)\,, \quad f(x) = x\,f'(\theta x)$$

le quali servono a rappresentare le relazioni che passano fra la funzione, e la prima derivata; così se $f(x)$ prenda successivamente i valori

$$(1+x)^m, \quad a^x, \; e^x, \; \log(1+x), \; \operatorname{sen} x, \; \cos x, \; \operatorname{arc\,tang} x$$

si dedurrà dall'ultime due formole

$$\left\{\begin{array}{l} (1+x)^m = 1 + mx(1+\theta x)^{m-1}, \quad a^x = 1 + x \log a . a^{\theta x} \\ e^x = 1 + xe^{\theta x}, \quad \log(1+x) = \dfrac{x}{1+\theta x} \\ \operatorname{sen} x = x \cos \theta x, \quad \cos x = 1 - x \operatorname{sen} \theta x \\ \qquad \operatorname{arc\,tang} x = \dfrac{x}{1+\theta^2 x^2} \end{array}\right.$$

Nella stessa guisa si potrebbero applicare ad altre funzioni. I ragionamenti con i quali abbiamo stabilito nei precedenti parag. alcune formole generali suppongono la funzione, e la variabile reale; ma non ci sarà difficile di estenderle a questi due casi; e ci limiteremo a riportare qualcuna delle formole generali, le quali sussistono e per la funzione, e per la variabile immaginaria.

51.° A questo oggetto riprendiamo la formola di già dimostrata nell'antecedente parag.

$$f(x) - f(o) = \frac{x^n}{1.\,2.\,3\,..\,n} f^{(n)}(\theta x)$$

nella quale la funzione derivata $f^{(n)}(x)$ mantiene un valore finito per $x = o$, perciò si potrà supporre

$$f^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(o) + I$$

I svanisce per $x = o$, per cui

$$f(x) - f(o) = \frac{x^n}{1.\,2.\,3\,..\,n}\left(f^{(n)}(o) + I\right)$$

Se vogliamo supporre di più $f(o) = o$, allora si ottiene semplicemente

$$f(x) = \frac{x^n}{1.2.3...n} \left(f^{(n)}(o) + I \right)$$

Ciò posto sia la funzione immaginaria

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \sqrt{-1}$$

e supponiamo che per $x = o$ si verifichi

$$f'(o) = o \,,\quad f''(o) = o \,,\quad f'''(o) = o \ldots\ldots f^{(n-1)}(o) = o$$

è evidente che essendo in generale

$$f^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x) + \psi^{(m)}(x) \sqrt{-1}$$

le due funzioni verificheranno parimente le condizioni

$$\varphi'(o) = o \,,\quad \varphi''(o) = o \,,\quad \varphi'''(o) = o \ldots\ldots \varphi^{(n-1)}(o) = o$$

$$\psi'(o) = o \,,\quad \psi''(o) = o \,,\quad \psi'''(o) = o \ldots\ldots \psi^{(n-1)}(o) = o$$

quindi per le medesime due funzioni reali si avrà

$$\varphi(x) - \psi(o) = \frac{x^n}{1.2.3..n} \left(\varphi^{(n)}(o) + I_1 \right)$$

$$\psi(x) - \psi(o) = \frac{x^n}{1.2.3..n} \left(\psi^{(n)}(o) + I_2 \right)$$

I_1, I_2 devono svanire per $x = o$. Sommando ora queste due equazioni dopo di aver moltiplicato la seconda per $\sqrt{-1}$, ricaveremo per la sostituzione

$$f(x) - f(o) = \frac{x^n}{1.2.3..n} \left(f^{(n)}(o) + I \right)$$

quando per brevità si ponga

$$I = I_1 + I_2 \sqrt{-1}$$

Ognun vede la coincidenza dell'espressione come era per la funzione reale. Quando la variabile x sia immaginaria, e della consueta forma

$$x = r\,(\cos t + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} t)$$

potremo considerare $f(x)$ come una funzione del modulo, mentre ad $x = o$ corrisponde necessariamente $r = o$, quindi per tutte quelle espressioni immaginarie per le quali è eseguibile la nota riduzione, supporremo

$$f\,(r\,(\cos t + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} t)) = \varphi\,(r) + \psi\,(r)\,\sqrt{-1}$$

Se per $x = o$ si verifica per le derivate

$$f'(o) = o\,,\quad f''(o) = o\,,\quad f'''(o)\ \ldots\ f^{(n-1)}\,(o) = o$$

siccome si ha in generale

$$f^{(m)}\,(\,r\,(\cos t + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} t)\,)\,(\cos mt + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} mt)$$
$$= \varphi^{(m)}\,(r) + \psi^{(m)}\,(r)\,\sqrt{-1}$$

così per $x = o$, o per $r = o$ si verificherà anche

$$\varphi'(o) = o\,,\quad \varphi''(o) = o\,,\quad \varphi'''(o) = o\,\ldots\ldots\,\varphi^{(n-1)}\,(o) = o$$

$$\psi'(o) = o\,,\quad \psi''(o) = o\,,\quad \psi'''(o) = o\,\ldots\ldots\,\psi^{(n-1)}\,(o) = o$$

quindi le due funzioni reali $\varphi(r)$, $\psi(r)$ daranno

$$\varphi(r) - \varphi(o) = \frac{r^n}{1.\,2.\,3..\,n}\,(\,\varphi^{(n)}\,(o) + I_1\,)$$

$$\psi(r) - \psi(o) = \frac{r^n}{1.\,2.\,3..\,n}\,(\,\psi^{(n)}\,(o) + I_2\,)$$

Moltiplicando la seconda per $\sqrt{-1}$, e sommando con

la prima, si osserverà che

$$x^n = r^n \left(\cos nt + \sqrt{-1} \text{ sen } nt \right)$$

$$f^{(n)}(o) = \frac{\varphi^{(n)}(o) + \psi^{(n)}(o) \sqrt{-1}}{\cos nt + \sqrt{-1} \text{ sen } nt}$$

e ponendo per brevità

$$I = \frac{I_1 + I_2 \sqrt{-1}}{\cos nt + \sqrt{-1} \text{ sen } nt}$$

troveremo con facilità

$$f(z) - f(o) = \frac{x^n}{1.\ 2.\ 3\ ..\ n} \left(f^{(n)}(o) + I \right)$$

e che sarà della medesima forma per la variabile x reale. Con i medesimi andamenti si potrebbero estendere al caso della variabile immaginaria le formole ottenute al parag. 49, e che per brevità omettiamo.

52.° Prima di passare a speciali applicazioni non sarà inutile di vedere come si esprima il differenziale dell'ordine n^{esimo} di una funzione y, quando le funzioni derivate, esclusa l' n^{esima} verifichino alcune particolari condizioni. Ripresa infatti la formola

$$f(x_o + h) - f(x_o) = \frac{h^n}{1.\ 2.\ 3\ ..\ n} f^{(n)}(x_o + \theta h)$$

che abbiamo stabilito al parag. 49, si verificherà

$$f'(o) = o, \quad f''(o) = o, \; \ldots \; f''(o) = o \ldots f^{(n-1)}(o) = o$$

Rappresentando x_o un valore generico, pongasi x in luogo di x_o porremo

$$y = f(x), \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ed insieme faremo

$$f^{(n)}(x+\theta h)=f^{(n)}(x)+I$$

I dovrà svanire con $h=\Delta x$, e riflettendo in fine che per il consueto infinitesimo α ausiliare si ha

$$\Delta x=\alpha\,(\,dx+K\,)$$

otterremo evidentemente

$$\Delta y=\frac{\alpha^n\,(\,dx+K\,)^n}{1.\,2.\,3\,...\,n}\,(\,f^{(n)}(x)+I\,)$$

Questa espressione della differenza Δy si rende più semplice col sostituire

$$(dx+K)^n=dx^n+K_1\,,\quad e\quad d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n$$

e verrà in fine sotto la forma

$$\Delta y=\frac{\alpha^n}{1.\,2.\,3\,..\,n}\,(\,d^ny+H\,)$$

H, K_1, svaniscono egualmente che K, ed I per $h=0$. Nella precedente formola Δy sarà un infinitesimo dell' ordine n^{esimo}, e si accorda pienamente a quanto fu detto al parag. 16 sui diversi ordini degli infinitesimi. Concluderemo in fine che se nella y per valori particolari si verifica, $y'=0$, $y''=0$, ... $y^{(n-1)}=0$ il differenziale dell'ordine n^{esimo} è definito dalla formola

$$d^ny=1.\,2.\,3\,..\,n\lim\frac{\Delta y}{\alpha^n}$$

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE AD ALCUNE QUESTIONI DI ANALISI PURA

Dei massimi, e minimi valori delle funzioni reali di una sola variabile: metodi per determinare i valori di quelle espressioni che si presentano sotto una forma indeterminata: ordini diversi delle quantità infinitamente piccole.

53.° Se per un valore particolare a, compreso fra due dati limiti della variabile indipendente x, la funzione $f(x)$ reale ammette un valore più grande di tutti quei che si otterrebbero facendo aumentare o diminuire la a di una quantità piccolissima, allora $f(a)$ si dice un valore *massimo* od anche un *maximum*, come $f(a)$ si dirà un *minimo* ovvero un *minimum*, se per valori più grandi, o più piccoli di a, si ottengano per $f(x)$ valori sempre maggiori. Il calcolo differenziale somministra dei metodi facili per riconoscere i *massimi* e *minimi* delle funzioni; ed infatti se $f(x)$ acquista un valore massimo per $x = a$, allora chiamando h una quantità infinitamente piccola dovrà essere

$$f(a-h) < f(a)\,, \quad \text{e} \quad f(a+h) < f(a)$$

dunque per la prima proprietà delle funzioni enunciata al parag. 47 si verificherà

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < a\,, \quad \text{e} \quad f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x > a$$

e per conseguenza se $f(x)$, $f'(x)$ sono continue entro due dati limiti x_0, X fra i quali trovasi compreso il valore a, la $f'(x)$ non potrà passare dai valori positivi

ai valori negativi senza passar per lo zero, la qual circostanza non potendo aver luogo che per $h=0$, sarà necessariamente

$$f'(a)=0$$

Che se la funzione prima derivata $f'(x)$ fosse discontinua; allora si verificherà

$$\frac{1}{f'(a)}=0$$

Con un ragionamento del tutto simile se la $f(x)$ non cessando di esser continua entro i limiti x_0. X quando fra questi valori ve ne sia uno $x=a$ che renda minima la funzione dovrà essere

$$f(a-h)>f(a), \quad e \quad f(a+h)>f(a)$$

dunque la funzione prima derivata verificherà le condizioni

$$f'(x)<0 \quad per \quad x<a, \quad e \quad f'(x)>0 \quad per \quad x>a$$

e quindi per $x=a$, sarà $f'(a)=0$, e nel caso della discontinuità $\frac{1}{f'(a)}=0$. Da tutto l'esposto si dedurrà che la condizione del *massimo*, e del *minimo* dovrà cercarsi nelle radici di una delle equazioni

$$f'(x)=0, \quad \frac{1}{f'(x)}=0$$

La prima sussiste per la continuità della funzione, e la seconda nel caso della discontinuità; per riconoscere poi quando la funzione dia un *massimo* od un *minimo* basti in questo momento richiamare che nel caso del *massimo* dovrà essere

$$f'(x)>0 \quad per \quad x<a, \quad e \quad f'(x)<0 \quad per \quad x>a$$

ed all'opposto per il *minimo* si sperimenterà la condizione

$$f'(x) < o \quad \text{per} \quad x < a, \quad \text{e} \quad f'(x) > o \quad \text{per} \quad x > a$$

Che se la funzione prima derivata $f'(x)$ per valori della x che differiscono da a di una quantità infinitesima, rimanga o costantemente positiva, o costantemente negativa, certamente per $f(x)$ non vi sarà valore nè *massimo*, nè *minimo*. A dilucidamento dell'esposta teoria proporremo alcune applicazioni.

54.° Vogliasi il valore massimo, e minimo dalla funzione

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

avremo dalla derivazione la condizione

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = o$$

e che si ridurrà all'equazione

$$x^2 - 4x + 3 = o$$

le radici della quale sono

$$x = 1\ , \qquad x = 3$$

d'onde per la sostituzione del primo valore nel secondo membro di $f(x)$ si ottiene

$$f(x) = 1$$

e per la sostituzione del secondo

$$f(x) = -3$$

Il primo sarà un *massimo* ed il secondo un *minimo*, ed infatti dalla funzione prima derivata, abbiamo per valori infinitamente piccoli di h

$$f'(1 + h) = 3\,(h^2 - 2h) < o\ , \quad f'(1 - h) = 3\,(h^2 + 2h) > o$$

quindi $x=1$ rende massima la funzione; per il secondo valore $x=3$ si ricava egualmente

$$f'(3+h)=3\,(h^2+2h)>o\,,\quad f'(3-h)=3\,(h^2-2h)<o$$

dunque $x=3$ dà un minimo per la funzione.

Sia inoltre

$$f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}$$

sarà dalla derivazione nel sistema dei logaritmi Neperiani, e dalla condizione del massimo, e del minimo

$$f'(x)=\frac{x^{\frac{1}{x}}\,(1-\log x)}{x^2}=o$$

ovvero

$$1-\log x=o$$

per la quale si verificherà

$$x=e$$

e, essendo la base degli indicati logaritmi Neperiani, in modo che $\sqrt[e]{e}$ sarà un massimo della funzione; ed avremo dalla funzione prima derivata

$$f'(e+h)=(e+h)^{\frac{1}{e+h}}\frac{(1-\log(e+h))}{(e+h)^2}$$

la quale sarà $<o$ per $h>o$, ed all'opposto $>o$ per $h<o$, dunque $x=e$ verifica le condizioni del massimo.

Abbiasi in fine

$$f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$$

sarà al solito

$$f'(r)=5x^4-20x^3+15x^2=o$$

della quale le radici sono

$$x = 0\,, \qquad x = 1\,, \qquad x = 3$$

e per questi valori la funzione diviene successivamente

$$f(x) = 1\,, \qquad f(x) = 2\,, \qquad f(x) = -26$$

Ora per $x = 0$

$$f'(h) = 5h^4 - 20h^3 + 15h^2 > 0$$

qualunque sia il segno della h, dunque l'indicato valore non somministra nè massimo nè minimo; per il secondo $x = 1$, si ha

$$f'(1 + h) = (1 + h)^2 (5h^2 - 10h)$$

la quale è < 0 per $h > 0$, ed al contrario > 0 per $h < 0$ dunque $f(x) = 2$ sarà un massimo; finalmente $x = 3$ porge

$$f'(3 + h) = (3 + h)^2 (5h^2 + 10h)$$

quantità > 0 per $h > 0$, e < 0 per $h < 0$ dunque, -26 è un minimo della funzione.

55.° Veniamo ora a stabilire dei criteri più generali per riconoscere i massimi e minimi valori delle funzioni. A questo oggetto abbiamo già veduto che nel caso del massimo $f'(x) < 0$ per $x > a$, e viceversa $f'(x) > 0$ per $x < a$, dunque per la prima proprietà enunciata al parag. 47, la derivata da $f'(x)$ ossia $f''(x)$ sarà negativa per valori della x eguali, e vicini ad a, o ciò che torna lo stesso $f''(a) < 0$. Con un ragionamento del tutto simile concludiamo che nel caso del minimo, essendo $f'(x) > 0$ per $x > a$, e $f'(x) < 0$ per $x < a$ sarà evidentemente $f''(x) > 0$ per $x = a$ e per $x \gtrless a$ dunque in questo caso $f''(a) > 0$: l'indicate condizioni sussistono quante volte $x = a$ non annulli $f''(x)$, mentre allora dovremo procedere nel modo che segue. Una funzione reale

di una sola variabile che per valori dati dalla medesima, diviene o nulla, o negativa, il valore nullo si reputa un *massimo*, per la funzione: come all'opposto una funzione non suscettibile di ricevere valori o nulli, o positivi, si reputa *minimo* il valore nullo. Dopo queste avvertenze se $x=a$ rende massima la $f(x)$, sarà $f'(a)=o$, ed insieme $f''(x)<o$ per $x>$, o, $<a$, quindi se $x=a$ annullasse ancora $f''(x)$, allora $f''(a)=o$ è un *massimo* della funzione derivata seconda, ma se $f''(a)$ è un massimo dovrà per $x=a$ annullarsi la sua derivata, ossia $f'''(a)=o$, e nel medesimo tempo $f^{\text{IV}}(x)<o$ per $x=a$ o per $x>$, o, $<a$; quando $x=a$ annullasse anche $f^{\text{IV}}(x)$ allora essendo $f^{\text{IV}}(a)=o$ un massimo sarà necessariamente $f^{\text{V}}(a)=o$, e dovrà verificarsi $f^{\text{VI}}(x)<o$ per $x=a$, o per $x>$, o, $<a$; proseguendo questo ragionamento facilmente si conclude che nel caso del *massimo* una funzione derivata di ordine pari sarà negativa per $x=a$: accenniamo brevemente il caso del *minimo*. Il valore $x=a$ renda un *minimo* $f(x)$, sarà sempre $f'(a)=o$, ed insieme $f''(x)>o$ per $x=a$, o per $x>$, o, $<a$ ma se $x=a$ somministra $f''(a)=o$; allora questo valore nullo sarà un *minimo* di $f''(x)$ e per conseguenza la sua derivata $f'''(x)$ darà $f'''(a)=o$, ed insieme $f^{\text{IV}}(x)>o$ per $x=a$, o per $x>$, o, $<a$; per lo stesso motivo $x=a$ annullando $f^{\text{IV}}(x)$ si avrebbe nenessariamente $f^{\text{V}}(a)=o$, e quindi $f^{\text{VI}}(a)>o$ per $x=a$, o per $x>$, o, $<a$; dunque nell'ipotesi del minimo, una derivata di ordine pari deve mantenersi positiva per $x=a$. Così per mostrare una qualche applicazione sia

$$f(x)=e^x-2\cos x+e^{-x}$$

ed avremo per una doppia derivazione

$$f'(x)=e^x+2\,\text{sen}\,x-e^{-x}$$

$$f''(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}$$

Ora $x = o$ porge $f'(x) = o$, e $f''(x) = 4$ dunque si otterrà per un minimo

$$f(x) = o$$

Sia inoltre

$$f(x) = e^x + 2 \cos x + e^{-x}$$

e derivando successivamente fino alla quarta

$$f'(x) = e^x - 2\text{sen } x - e^{-x}, \quad f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x}$$

$$f'''(x) = e^x + 2\text{sen } x - e^{-x}, \quad f^{\text{IV}}(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}$$

Il valore $x = o$ rende nel medesimo tempo

$$f'(x) = o, \quad f''(x) = o, \quad f'''(x) = o, \quad f^{\text{IV}}(x) = 4$$

dunque per $x = o$ si ottiene un minimo per la funzione, vale a dire

$$f(x) = 4$$

Termineremo di parlare della teoria dei massimi, e minimi, col richiamare che quante volte $x = a$ per una data funzione verifichi

$$f'(a) = o, \quad f''(a) = o, \quad f'''(a) = o, \ldots f^{(n-1)}(a) = o$$

si avrà come già si è provato verso la fine del parag. 49

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^n}{1.\,2.\,3\,..\,n} f^{(n)}(a + \theta h)$$

ove $\theta > o$, e < 1. Quando $f(a)$ sia un massimo, il primo membro di questa equazione dovrà esser necessariamente negativo qualunque sia il segno della h, e perciò il secondo membro non potrà verificare la medesima condizione, se non sia n pari, ed insino $f^{(n)}(a) < o$: nella stessa guisa se $f(a)$ sia un minimo, il primo e secondo membro non saranno positivi se non quando n pari, e $f^{(n)}(a) > o$. Queste conclusioni erano state di già dedot-

te da considerazioni differenti. Passiamo ora alla risoluzione di altre questioni che ci eravamo proposti.

56.° Alcune funzioni per valori particolari attribuiti alla variabile indipendente x, si presentano sotto le forme indeterminate

$$\frac{0}{0}, \quad \pm\frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\pm\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^{\pm\infty}$$

Ora il calcolo infinitesimale somministra alcune speciali regole per conoscere i veri valori di quelle funzioni che si presentano sotto le indicate forme indeterminate. Così supposto che

$$y = f(x), \qquad z = F(x) \ldots$$

sieno due funzioni che per $x = a$ si verifichi non solo

$$y = 0, \qquad z = 0$$

ma ben anche

$$y' = 0, \; z' = 0, \; y'' = 0, \; z'' = 0, \; \ldots \; y^{(n-1)} = 0 \; z^{(n-1)} = 0$$

allora come già si è stabilito al principio del parag. 49, avremo generalmente

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{F^{(n)}(a+\theta h)}$$

essendo $\theta > 0$, e < 1: facendo ora $h = 0$ si ricaverà

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f^{(n)}(a)}{F^{(n)}(a)}$$

Di qui deduciamo che il vero valore vien dato dal rapporto di quelle derivate che non svaniscono simultaneamente per $x = a$. Alla medesima conclusione giungiamo anche facilmente nel modo seguente.

Riprese le due funzioni

$$y = f(x), \qquad z = F(x)$$

abbiamo generalmente

$$\frac{y}{z} = \lim \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z}$$

quindi se per $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ sarà

$$\frac{0}{0} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta z} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} : \lim \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

o più semplicemente

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

se per il medesimo valore a si verificasse

$$f'(a) = 0, \qquad F'(a) = 0$$

allora il vero valore della frazione dovrà cercarsi nel rapporto

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f''(a)}{F''(a)}$$

ed in generale in

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f^{(n)}(a)}{F^{(n)}(a)}$$

quando le derivate fino all'ordine $n^{esimo} - 1$ svaniscano per $x = \alpha$. Così per esempio le tre frazioni

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad \frac{a^x - b^x}{x}, \qquad \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

per $x = 0$ divengono $\frac{0}{0}$, ed eseguendo il rapporto delle derivate del primo ordine nelle prime due ; e di second'ordine nell'ultima, si ottiene per $x = 0$

$$\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim \frac{a^x - b^x}{x} = \log \frac{a}{b}, \quad \lim \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

come anche le due frazioni

$$\frac{x^n - 1}{x - 1}, \qquad \frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x - 1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - x + 1}$$

daranno per $x = 1$

$$\lim \frac{x^n - 1}{x - 1} = n$$

$$\lim \frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x - 1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - x + 1} = -\frac{3}{2}$$

57.° Alcuna volta può succedere che l'indeterminazione non cessi di sussistere qualunque sia l'ordine delle derivate tanto del numeratore, che del denominatore, e fra le altre circostanze si verifica quando le due funzioni y, z contengono dei radicali che comprendono tutte le quantità, e quali si riproducano costantemente nella derivazione, in questo caso se n sia l' esponente intero che toglie i radicali da y, z è evidente che la nuova frazione

$$\frac{y^n}{z^n} = \frac{[\,f(x)\,]^n}{[\,F(x)\,]^n}$$

per $x = a$ potrà essere inclusa nella regola stabilita per togliere l'indeterminazione quindi potremo avere

$$\lim \frac{y}{z} = \left(\lim \frac{[\,f(x)\,]^n}{[\,F(x)\,]^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

e dalla quale si ricaverà il richiesto valore; così per esempio la frazione

$$\frac{\sqrt{3ax - 2a^2 - x^2}}{\sqrt[3]{x - a}}$$

diviene $\frac{0}{0}$ per $x = a$, e si mantiene sotto la forma indeterminata qualunque sia il numero delle derivazioni che si eseguiscano sul numeratore, e denominatore, pur tuttavia scrivendo

$$\frac{\sqrt{3ax - 2a^2 - x^2}}{\sqrt[3]{x - a}} = \left(\frac{(3ax - 2a^2 - x^2)^3}{(x - a)^2}\right)^{\frac{1}{6}}$$

si trova dal rapporto delle derivate del second' ordine, per $x = a$

$$\lim \frac{(3ax - 2a^2 - x^2)^3}{(x - a)^2} = 3a$$

d'onde

$$\lim \frac{\sqrt{3ax - 2a^2 - x^2}}{\sqrt[3]{x - a}} = \sqrt[6]{3a}$$

Nella generalità di questi casi sarà contuttociò meglio di sostituire $a + h$ invece della x, di eseguire le riduzioni, e di far in seguito $h = 0$.

58.° Le due funzioni $f(x)$, $F(x)$ divengano infinite per $x = a$; svaniranno per il medesimo valore le due

funzioni

$$\frac{1}{f(x)}, \quad \frac{1}{F(x)}$$

e siccomo

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{F(x)} : \frac{1}{f(x)}$$

così per $x = a$ sarà

$$\pm \frac{\infty}{\infty} = \frac{f(a)}{F(a)} = D \frac{1}{F(x)} : D \frac{1}{f(x)} = \frac{F'(a)\,(\,f(a)\,)^2}{f'(a)\,(\,F(a)\,)^2}$$

dalla quale

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \pm \frac{\infty}{\infty} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

Se le funzioni derivate fino all'ordine $n - 1$ divengono esse stesse infinite per $x = a$ allora si avrebbe come nel parag. 56.

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \pm \frac{\infty}{\infty} = \frac{f^{(n)}(a)}{F^{(n)}(a)}$$

Di qui come fa osservare il sig. Cauchy una medesima operazione ci fa giungere ai valori dell' espressioni indeterminate $\frac{0}{0}$, $\pm \frac{\infty}{\infty}$. Il precedente ragionamento avrà luogo quando il cercato rapporto sia diverso da zero, e da infinito. Che se tutte le derivate divengono infinite, questo metodo non sarà più applicabile, e si potrà sostituire come già abbiamo avvertito $a + h$ invece di x, e di fare $h = o$ dopo le riduzioni. Le due funzioni

$$f(x) = \log x\,, \qquad F(x) = \cot x$$

divengono ambedue infinite, e di segno contrario per $x=o$ ed essendo

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,, \qquad F'(x) = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}$$

si avrà per $x = 0$

$$\lim \frac{\log x}{\cot x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \frac{0}{0}$$

e protraendo il rapporto delle derivate troveremo

$$\lim \frac{\log x}{\cot x} = 0$$

L'esposte regole potranno estendersi con facilità agli altri casi di forme indeterminate: ed infatti se nel prodotto

$$s = yz$$

per $x = a$, si verifichi $y = 0$, $z = \pm \infty$, è chiaro che essendo identicamente

$$yz = \frac{y}{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z}{\left(\frac{1}{y}\right)}$$

saremo riportati alle espressioni di già considerate $\frac{0}{0}$, $\pm \frac{\infty}{\infty}$. Così il prodotto

$$x \log x$$

che diviene $-\infty . 0$ per $x = 0$, darà con gran facilità

$$\lim x \log x = \lim \frac{\log x}{x^{-1}} = -\frac{\infty}{\infty} = -\frac{x^{-1}}{x^{-2}} = -x = 0$$

59.° Infine se per il consueto valore $x = a$ le due funzioni y, z, divengono

$$y = 0, \qquad z = 0$$

ovvero

$$y = \infty, \qquad z = 0$$

oppure

$$y = 1\ , \qquad z = \pm\infty$$

allora la funzione

$$s = y^z$$

assume le tre espressioni indeterminate

$$0^0\ , \qquad \infty^0\ , \qquad 1^{\pm\infty}$$

E per ottenere questi valori basterà osservare primieramente che

$$\log s = z \log y = \frac{\log y}{z^{-1}}$$

d'onde di nuovo

$$s = e^{\frac{\log y}{z^{-1}}}$$

e quindi per il primo caso

$$\frac{\log y}{z^{-1}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Per il secondo caso

$$\frac{\log y}{z^{-1}} = 0.\infty$$

e per il terzo caso

$$\frac{\log y}{z^{-1}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

In qualunque circostanza però non avremo che a determinare il rapporto delle derivate delle due funzioni

$$\log y\ , \qquad z^{-1}$$

e si otterrà

$$s = e^{-\frac{y' z^2}{y\, z'}}$$

Così prendendo

$$y = x\,, \qquad z = x$$

sarà per $x = 0$

$$z = 0^0 = e^{-\frac{x^2}{x}} = e^{-x} = 1$$

Nello stesso modo per

$$y = \frac{1}{x}\,,\ z = x\,, \quad \text{e per} \quad x = \infty$$

$$z = \infty^0 = e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

Infine supponendo

$$y = x\,, \quad z = \frac{1}{1-x}\,, \quad \text{ed} \quad x = 1$$

si ricaverà

$$z = x^{\frac{1}{1-x}} = 1^\infty = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

Si porrà fine a questa teoria coll' osservare che in alcune circostanze si giunge assai facilmente ai veri valori delle espressioni indeterminate togliendo i fattori comuni delle due funzioni. Così per esempio nelle funzioni

$$\frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

che per $x = 1$ diviene $\frac{0}{0}$ si vede che

$$x - 1 = (x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1)\,(x^{\frac{1}{3}} - 1)$$

e perciò

$$\frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1$$

d'onde per $x = 1$

$$\lim \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = 3$$

60.° Parliamo ora brevemente dei diversi ordini degli infinitesimi. Sia α, un infinitesimo ed insieme $f(\alpha)$ una funzione infinitesima la quale avrà la proprietà di svanire per $\alpha = o$, e si dirà un infinitesimo di un certo ordine da riferirsi ad α, che si potrà chiamare la *base* degli infinitesimi in un dato sistema. Ciò posto se oltre $f(o) = o$ si verificasse anche per le funzioni $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $f'''(\alpha)$ . . . $f^{(n-1)}(\alpha)$ la proprietà di svanire per $\alpha = o$, vale a dire che sieno esse stesse infinitesime, allora per la prima formola del parag. 51 si ottiene

$$f(a) = \frac{\alpha^n}{1.\,2.\,3\,..\,n} f^{n)}(\theta\alpha)$$

ove secondo il consueto $\theta > o$, e < 1 e la $f^{n)}(\alpha)$ è la prima delle funzioni che ritiene un valore finito per $\alpha = o$. Ciò posto se assumasi α come un infinitesimo di primo ordine, $f(\alpha)$ sarà un infinitesimo dell'ordine n mentre il coefficiente $f^{n)}(\theta\alpha)$ cessa di essere un infinitesimo, o ciò che torna il medesimo $f^{n)}(o)$ ritiene un valore finito; quindi dividendo la precedente equazione per α^n, e passando ai limiti, si avrà

$$\lim \frac{f(\alpha)}{\alpha^n} = \frac{f^{n)}(o)}{1.\,2.\,3\,..\,n}$$

la quale è d'accordo con quanto si è detto sulla mede sima questione al parag. 16. Ognun vede che l' ordine dell'infinitesimo corrisponde all'ordine della funzione derivata che non svanisce per $\alpha = o$: infine il rapporto

$\frac{f(\alpha)}{\alpha^n}$ è il primo termine della progressione geometrica

$$f(a), \quad \frac{f(\alpha)}{\alpha}, \quad \frac{f(\alpha)}{\alpha^2}, \quad \frac{f(\alpha)}{\alpha^3}, \ldots \frac{f(\alpha)}{\alpha^{n-1}}$$

che cessa di essere un infinitesimo. La precedente osservazione unitamente all'ultima stabilita formola porge un mezzo speditissimo per riconoscere l'ordine degli infinitesimi. Così dei quattro infinitesimi

$$\text{sen}\,\alpha, \quad e^{\alpha} - e^{-\alpha}, \quad 1 - \cos\alpha, \quad \alpha - \text{sen}\,\alpha$$

si vedrà chè i primi due sono infinitesimi di primo ordine, il terzo appartiene al second'ordine, ed il quarto sarà un infinitesimo del terzo.

61. La teoria che riguarda i diversi ordini degli infinitesimi può anche generalizzarsi nel modo seguente. Sia a un numero fisso razionale, od irrazionale, ed α un infinitesimo preso per base in un dato sistema; se la funzione $f(\alpha)$ svanisce per $\alpha = o$ si dirà un infinitesimo dell'ordine a quando chiamato k un numero variabile, il limite del rapporto

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha^k}$$

sia nullo per valori di $k < a$, ed infinito per valori di $k > a$, ossia

$$\lim \frac{f(\alpha)}{\alpha^k} = o \quad \text{per} \quad k < a$$

ed insieme

$$\lim \frac{f(\alpha)}{\alpha^k} = \infty \quad \text{per} \quad k > a$$

Ritenendo questa definizione, e chiamando n il primo

dei numeri interi, od eguale od immediatamente superiore ad a, è evidente che la frazione

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha^n}$$

sarà il primo termine della progressione geometrica

$$f(\alpha), \quad \frac{f(\alpha)}{\alpha}, \quad \frac{f(\alpha)}{\alpha^2}, \quad \frac{f(\alpha)}{\alpha^3}, \ldots$$

che cesserà di essere un infinitesimo, o ciò che torna lo stesso, $f^{(n)}(\alpha)$ sarà la prima delle funzioni

$$f(\alpha), \quad f'(\alpha), \quad f''(\alpha), \quad f'''(\alpha) \ldots\ldots$$

che ritiene un valore finito per $\alpha = 0$. Se poi nel rapporto

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha^k}$$

si ponesse $k = a$, allora può succedere che il suo limite converga a valori o finiti, o nulli od infiniti. Tanto si verifica nei tre infinitesimi dell'ordine a

$$\alpha^a e^\alpha, \quad \frac{\alpha^a e^\alpha}{\log(\alpha)}, \quad \alpha^a e^\alpha \log(\alpha)$$

ove dividendo per α^a, otteniamo per quoti

$$e^\alpha, \quad \frac{e^\alpha}{\log(\alpha)}, \quad e^\alpha \log(\alpha)$$

dei quali i limiti sono

$$1, \quad 0, \quad \text{ed} \quad \frac{1}{0} = \infty$$

Per un maggior sviluppo della dottrina degli infinitesimi potrà consultarsi o il calcolo differenziale, o l'applicazione del calcolo alla geometria del sig. Cauchy, dalle quali opere abbiamo estratto quanto si è esposto nei passati paragrafi.

Sullo sviluppo delle funzioni in serie, ed in particolare sui Teoremi, di Taylor, e Mac-Laurin.

62.° Rappresentando per $f(x)$ una funzione continua della variabile x, che per un valore particolare x_0, verifica le condizioni

$$f'(x_0)=0 \quad f''(x)=0 \,, \quad \ldots\ldots \quad f^{(n-1)}(x_0)=0$$

e chiamando h un incremento infinitamente piccolo della x, noi abbiamo per una delle ultime formole del parag. 49.

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{1.\,2.\,3..\,n}\,f^{(n)}(x_0+\theta h)$$

Se sia anche $f(x_0)=0$, ed insieme $x_0=0$, la formola precedente diverrà

$$(1)\qquad f(h)=\frac{h^n}{1.\,2.\,3\,..\,n}\,f^{(n)}(\theta h)$$

la quale si potea dedurre dalla prima formola del parag. 51; la funzione $f(h)$ sarà continua a partir da $h=0$, e verificherà evidentemente le condizioni

$$f(0)=0\,,\quad f'(0)=0\,,\quad f''(0)=0\,,\quad \ldots\ f^{(n-1)}(0)=0$$

Ciò posto se sia data una funzione qualunque della h, e dato un numero intero qualunque n potremo sempre trovare una funzione intera, del grado $n-1$ della medesima h, e che sia scelta in modo che le due funzioni della h, quanto le loro derivate di un ordine minore di n acquistino dei valori eguali per $h=0$; se queste due funzioni si rappresentino per $f(x+h)$, $\varphi(x+h)$,

ove x sia una variabile indipendente dalla h, avremo per la seconda

$$\varphi(x+h)=a_0+a_1 h+a_2 h^2+\ldots+a_{n-1} h^{n-1}$$

quindi dalle derivate rapporto ad h, e per la supposizione di $h=0$, si troverà

$$f(x)=\varphi(x)=a_0\,,\quad f'(x)=\varphi'(x)=a_1\ \ldots\,,$$

$$f^{(n-1)}(x)=\varphi^{(n-1)}(x)=1.2.3\ldots(n-1)\,a_{n-1}$$

dalle quali

$$a_0=f(x)\,,\quad a_1=f'(x)\,,\quad a_2=\frac{1}{1.2}f''(x)$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{1.2.3\ldots n-1}f^{(n-1)}(x)$$

e per conseguenza

$$\varphi(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$

$$+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}f^{(n-1)}(x)$$

Determinato in questo modo il valore di $\varphi(x+h)$, la differenza $f(x+h)-\varphi(x+h)$ è una funzione che si annullerà con la h e con le sue derivate di un ordine minore di n. Indicando questa differenza per $\mathrm{f}(h)$ cosicchè sia

$$\mathrm{f}(h)=f(x+h)-\varphi(x+h)$$

La funzione $\mathrm{f}(h)$ verifica la formola (1) ed osservando che

$$\mathrm{f}^{(n)}(h)=f^{(n)}(x+h)$$

si ricaverà

$$f(x+h)-\varphi(x+h)=\frac{h^n}{1.2.3..n}f^{(n)}(x+\theta h)$$

ovvero

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots\dots$$

$$+\frac{h^{n-1}}{1.2.3..n-1}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2.3..n}f^{(n)}(x+\theta h)$$

Quest'ultima formola ci dice che lo sviluppo di $f(x+h)$ risulta, e del seguito dei termini

$$f(x),\ \frac{h}{1}f'(x),\ \frac{h^2}{1.2}f''(x),\ \dots\dots\ \frac{h^{n-1}}{1.2.3..n-1}f^{(n-1)}(x)$$

e del resto

$$r_n=\frac{h^n}{1.2.3...n}f^{(n)}(x+\theta h)$$

La supposizione di $n=1,\ 2,\ 3\ \dots\dots$ porge le diverse formole

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$$

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2.}f''(x+\theta h)$$

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2.}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3.}f'''(x+\theta h)$$

. . . .

Il numero θ variabile, e di valor decrescente da una serie all'altra sarà sempre compreso fra o, ed 1.

Se al crescere indefinitamente del numero n il resto converga verso lo zero, allora i termini in propo-

sito formeranno una serie convergente, secondo le potenze ascendenti della h, e sotto l'indicata condizione $f(x+h)$ rappresenterà la somma della medesima, vale a dire

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots.$$

In questa formola consiste il teorema di *Taylor*. Se si faccia $x=0$, e si cangi h in x, avremo evidentemente

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)$$

$$+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3..n-1}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2.3..n}f^{(n)}(\theta x)$$

Qui pure lo sviluppo di $f(x)$ è composto, e del seguito dei termini

$$f(0),\ \frac{x}{1}f'(0),\ \frac{x^2}{1.2}f''(0),\ \ldots\ \frac{x^{n-1}}{1.2.3..n-1}f^{(n-1)}(0)$$

e del resto

$$r_n=\frac{x^n}{1.2.3..n}f^{(n)}(\theta x)$$

Se crescendo indefinitamente il numero n, il resto r_n converga verso lo zero, potrà $f(x)$ svilupparsi in serie convergente secondo le potenze ascendenti della x, cioè

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1}+f''(0)\frac{x^2}{1.2}+f'''(0)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

In questa formola consiste il Teorema di *Mac-Laurin* (*).

(*) La trovata formola comunemente ammessa sotto il vocabolo di Teorema di *Mac-Laurin*, era di già dovuta a *Stirling*.

Sarà inutile qui di richiamare la condizione della continuità della funzione e delle derivate a partir da un dato valor della x, nella serie di Taylor, e da $x = 0$ nella serie di Mac-Laurin.

63.° Oltre le indicate espressioni dei resti delle serie di Taylor, e Mac-Laurin avvene qualche altra che sarà utile di conoscere. Sia a un valore particolare della x, e supponiamo che la funzione resti finita e continua unitamente alle sue derivate da $x = a$ fino ad $x = a + h$, sarà per lo sviluppo di

$$f(a + x - a) = f(x)$$

dal penultimo valore di $f(x + h)$,

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\,.\,2} f''(a) + \dots$$

$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{1.\,2.\,3..n-1} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{1.\,2.\,3\,..\,n} f^{(n)}(a + \theta\,(x-a))$$

Qui abbiamo lo sviluppo di $f(x)$ secondo le potenze ascendenti della differenza $x - a$, quando a rappresenti un valore particolare della x; se prendasi successivamente $x = 1$, 2, 3, ... otterremo i resti della serie dopo il primo, secondo, terzo, ... termine; così facendo $n = 1$, avremo la formola

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(x + \theta_1\,(x-a))$$

il nuovo numero θ_1 sempre > 0, e < 1; dalla quale deduciamo il rapporto

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a + \theta_1\,(x-a))$$

Prendendo adesso la derivata dell'ordine $n-1$ rapporto ad a, e facendo per brevità

$$\varphi(a)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\,.\,2}f''(a)+\ldots$$

$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.\,2.\,3..\,n-1}f^{(n-1)}(a)$$

ricaveremo

$$D_a^{n-1}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=1.\,2.\,3..\,n-1\;\frac{(f(x)-\varphi(a))}{(x-a)^n}$$

$$D_a^{n-1}f'(a+\theta_1(x-a))=(1-\theta_1)^{n-1}f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))$$

e perciò

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.\,2}f''(a)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.\,2.\,3..\,n-1}f^{(n-1)}(a)+r_n$$

la nuova forma del resto sarà

$$r_n=\frac{(1-\theta_1)^{n-1}}{1.\,2.\,3..\,n-1}(x-a)^nf^{(n)}(a+\theta_1(x-a))$$

Che se pongasi $x=a+h$, e si cangi dopo la sostituzione a in x, allora la precedente espressione diverrà il resto della serie di Taylor dopo il termine n^{esimo}, vale a dire

$$r_n=\frac{(1-\theta_1)^{n-1}}{1.2.\,3..\,n-1}h^nf^{(n)}(x+\theta_1h)$$

Facendo poi $x=0$, e sostituendo x invece di h, si

otterrà la nuova forma del resto della serie di Mac-Laurin, cioè

$$r_n = \frac{(1-\theta_1)^{n-1}}{1.2.3\,..\,n-1}\, x^n f^{(n)}(\theta_1 x)$$

Riassumeremo brevemente adunque che il Teorema di Taylor rappresentato dalla formola

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + ..,$$

sussiste tutte le volte che le funzioni

$$f(x+z),\ f'(x+z),\ f''(x+z),\ \ldots.$$

essendo continue entro i limiti $z=0$, e $z=h$, una delle quantità

$$\frac{h^n}{1.2.3\,..\,n}f^{(n)}(x+\theta h),\quad \frac{h^n(1-\theta_1)^{n-1}}{1.2.3\,..\,n-1}f^{(n)}(x+\theta_1 h)$$

si annulli per valori infiniti di n; allora la serie

$$f(x),\ \frac{h}{1}f'(x),\ \frac{h^2}{1.2}f''(x),\ \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x),\ \ldots,$$

è convergente, ed avrà per somma $f(x+h)$: un ragionamento simile ha luogo per il Teorema di Mac-Laurin.

Pongasi adesso $y=f(x)$, e per le derivate

$$y'=f'(x),\quad y''=f''(x),\ \ldots\ y^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

e si chiamino y_0, y'_0, y''_0, $y^{(n)}_0$ le derivate per la supposizione di $x=0$, avremo dal teorema di Taylor la differenza

$$\Delta y = y'\frac{h}{1} + y''\frac{h^2}{1.2} + y'''\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

e dal teorema di Mac-Laurin

$$y = y_0 + y'_0 \frac{x}{1} + y''_0 \frac{x^2}{1 . 2} + y'''_0 \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \dots$$

Su questa forma in particolare noi faremo uso dei due teoremi per semplificare le applicazioni che verremo ad esporre dopo di aver richiamato brevemente i caratteri della convergenza e divergenza di ambedue le serie.

64.° Il seguito dei termini

$$y, \; y' \frac{h}{1}, \; y'' \frac{h^2}{1 . 2}, \; y''' \frac{h^3}{1 . 2 . 3}, \dots$$

formerà una serie convergente secondo le potenze ascendenti della h, quante volte il rapporto fra due termini consecutivi, e generali

$$\frac{y^{(n)} h^n}{1 . 2 . 3 .. n}, \qquad \frac{y^{(n+1)} h^{n+1}}{1 . 2 . 3 ... n \; n+1}$$

per valori infinitamente grandi di n, converga verso una quantità positiva o negativa < 1, o ciò che torna lo stesso

$$\lim \frac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}} \frac{h}{n+1} < 1$$

e ponendo per brevità

$$\lim \frac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}} \frac{1}{n+1} = A$$

dovrà evidentemente h esser compreso fra i limiti

$$h = + \frac{1}{A}, \qquad h = - \frac{1}{A}$$

se l'indicato limite sarà > 1, la serie è divergente, e priva di somma. In egual modo se per il seguito dei termini

$$y_0, \; y'_0 \frac{x}{1}, \quad y''_0 \frac{x^2}{1.2}, \quad y'''_0 \frac{x^3}{1.2.3}, \ldots$$

della serie di Mac-Laurin, nel rapporto di due termini consecutivi

$$y_0^{(n)} \frac{x^n}{1.2.3..n}, \quad y_0^{(n+1)} \frac{x^{n+1}}{1.2.3..n.n+1}$$

si verifica per $n = \infty$

$$\lim \frac{y_0^{(n+1)}}{y_0^{(n)}} \cdot \frac{x}{n+1} < 1$$

allora la serie sarà convergente, e la y si svilupperà secondo le potenze ascendenti della x per valori compresi fra i limiti

$$x = + \frac{1}{A}, \quad x = - \frac{1}{A}$$

ove sia

$$A = \lim \frac{y_0^{(n+1)}}{y_0^{(n)}} \cdot \frac{1}{n+1}$$

Quando il noto limite riesca > 1, la serie sarà divergente, e priva di somma. Non mancheremo poi di richiamare che in alcuni casi, il limite del rapporto di due termini consecutivi potrebbe esser eguale all'unità, e pur tuttavia riuscire la serie, o convergente, o divergente. Sotto tutte queste condizioni, i residui o resti di ambedue le serie convergeranno verso lo zero: ripresi poi i due resti

$$\frac{(1-\theta_1)^{n-1} h^n}{1.2.3..n-1} f^{(n)}(x+\theta_1 h), \quad \frac{(1-\theta_1)^{n-1} x^n}{1.2.3..n-1} f^{(n)}(\theta_1 x)$$

e riflettendo che i coefficienti

$$\frac{(1-\theta_1)^{n-1}\,h^n}{1.\,2.\,3..\,n-1}\,,\qquad \frac{(1-\theta_1)^{n-1}\,x^n}{1.\,2.\,3..\,n-1}$$

per $n=\infty$ convergono verso lo zero, dedurremo che allora i residui, o resti delle serie di Taylor, e Mac-Laurin convergeranno verso lo zero, quando per valori infinitamente grandi del numero n, le due funzioni

$$f^{(n)}(x+\theta_1 h),\, f^{(n)}(\theta_1 x)$$

ritengano un valore finito: può contuttociò succedere che queste due ultime funzioni crescano indefinitamente con n, e pur tuttavia i residui convergano verso lo zero. A tutto questo aggiungiamo che quando una funzione continua della x è sviluppabile in serie convergente per le potenze ascendenti della x, e della forma

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots.$$

allora la determinazione dei coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3, ... a_n si eseguirà con estrema facilità; infatti facendo n derivazioni, e supposto $x=0$, si avrà in generale per un coefficiente qualunque

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{1.\,2.\,3..\,n}$$

Ognun vede che il secondo membro della $f(x)$ non differirà dal teorema di Mac-Laurin: nella stessa guisa se $f(x+h)$ si sviluppi in serie convergente per le potenze ascendenti della h; otterremo dai valori dei coefficienti il teorema di Taylor per il valore di $f(x+h)$.

65.° Presentiamo ora alcune applicazioni che riguardano specialmente il teorema di Mac-Laurin; e ripren-

diamo per conseguenza la formola

$$y = y_0 + y'_0 \frac{x}{1} + y''_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + y'''_0 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$+ y_0^{(n-1)} \frac{x^{n-1}}{1.\,2.\,3..\,n-1} + r_n$$

il resto r_n è dato dalla doppia espressione

$$r_n = \frac{x^n}{1.\,2.\,3\,..\,n} f^{(n)}(\theta x) = \frac{(1-\theta_1)^{n-1} x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3..\,n-1} f^{(n)}(\theta_1 x)$$

Sia pertanto a un numero reale fisso qualunque, ed

$$y = (1+x)^a$$

si ricaverà

$$y' = a(1+x)^{a-1}, \quad y'' = a(a-1)(1+x)^{a-2}$$

$$\dots\; y^{(n)} = a(a-1)(a-2)\dots(a-(n-1))(1+x)^{a-n}$$

e per il residuo avremo

$$r_n = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-(n-1))}{1.\,2.\,3\dots n-1}(1-\theta_1)^{n-1} x^n (1+\theta_1 x)^{a-n}$$

quindi per valori qualunque reali di x ed a si avrà

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1.\,2.\,3} x^3 + \dots$$

$$+ \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-(n-2))}{1.\,2.\,3\,..\,n-1} x^{n-1}$$

$$+ \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-(n-1))}{1.\,2.\,3..\,n-1}(1-\theta_1)^{n-1} x^n (1+\theta_1 x)^{a-n}$$

Per conoscere le condizioni della convergenza per valori qualunqne reali di a, basterà formare il rapporto di due termini consecutivi

$$\frac{y_0^{(n+1)}}{y_0^{(n)}}\frac{x}{n+1}=\frac{a-n}{n+1}\,x=\frac{\frac{a}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}\,x$$

d'onde per $n=\infty$

$$\lim\frac{y_0^{(n+1)}}{y_0^{(n)}}\frac{x}{n}=-x$$

dunque la serie sarà convergente per valori della x compresi fra i limiti 1, e, -1, ed allora sussiste

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.\,2.\,3}x^3$$

$$+\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{2.\,3.\,4}x^4+\ldots\ldots$$

La condizione della convergenza del binomio può anche dedursi analizzando le differenti forme del resto r_n, le quali come si deduce dal secondo membro della seconda equazione di questo parag., saranno

$$\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\ldots(a-(n-1))}{1.\,2.\,3\,..\,n}x^n(1+\theta x)^{a-n}$$

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1))}{1.\,2.\,3..\,n-1}(1-\theta_1)^{n-1}x^n(1+\theta_1 x)^{a-n}$$

Ora quanto al primo di questi resti si decompone in due fattori

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1))\,x^n}{1.\,2.\,3\,....\,n}\ ,\ \text{ed}\ \ (1+\theta x)^{a-n}\ .$$

e supposto x compreso fra o, e $+1$ il primo fattore per valori infiniti di n converge verso lo zero, mentre se n aumenta di un' unità, si troverà moltiplicato per $\frac{a-n}{n+1}x$ che converge verso $-x$, dunque l'assoluto valore è minore dell'unità; quanto al secondo fattore

$$(1+\theta x)^{a-n} = \frac{(1+\theta x)^a}{(1+\theta x)^n}$$

e supposto x sempre positivo convergerà esso stesso verso lo zero, a meno che θ non si avvicinasse indefinitamente allo zero; in tutti gli altri casi questo fattore resterà minore dell'unità, e per conseguenza tutto il resto della serie per valori della x positivi compresi fra o, e $+1$, converge verso lo zero.

Quando x sia negativo, il secondo fattore potrebbe convergere verso l'infinito, a misura che n aumenta, e nell' ipotesi che θ non tenda verso lo zero; prendendo adunque la seconda forma del resto, che si decompone nei due fattori

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1))x^n}{1.2.3\ldots n-1}$$

$$(1-\theta_1)^{n-1}(1+\theta_1 x)^{a-n}$$

Il primo converge ancora verso lo zero, e l'altro fattore, sostituendo $-z$ invece di x, diverrà

$$(1-\theta_1 z)^{a-1}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_1 z}\right)^{n-1}$$

e si verifica per $z<1$

$$\frac{1-\theta_1}{1-\theta_1 z}<1$$

dunque per $n = \infty$ questo fattore tenderà verso lo zero; e perciò la serie sarà convergente per valori della x compresi fra $+1$, e -1.

66.° Prendendo

$$y = \log(1 + x)$$

si dedurrà dalla derivazione nel sistema dei logaritmi Neperiani

$$y' = \frac{1}{1+x}, \quad y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad y''' = \frac{1.2}{(1+x)^3}, \ \ldots$$

$$\ldots\ y^{(n-1)} = \pm \frac{1.2\ 3..n-2}{(1+x)^{n-1}}, \quad y^{(n)} = \mp \frac{1.2.3...n-1}{(1+x)^n}$$

dalle quali per $x = 0$

$$y_0 = 0, \quad y'_0 = 1, \quad y''_0 = -1, \quad y'''_0 = 1.2, \quad y_0^{IV} = -1.2.3$$

. . . .

$$y^{(n-1)} = \pm 1.2.3.n-2, \quad y^{(n)} = \mp 1.2.3..n-1$$

Infine la doppia espressione del resto

$$r_n = \mp \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n} = \mp \frac{(1-\theta_1)^{n-1} x^n}{(1+\theta_1 x)^n}$$

per cui

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$\mp \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

ovvero facendo uso del secondo residuo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$\mp \frac{x^n (1-\theta_1)^{n-1}}{(1+\theta_1 x)^n}$$

Il segno — vale per l'esponente pari, ed il segno + per l'impari.

Nella trovata serie il rapporto di due termini consecutivi, sarà, astrazione fatta dal segno

$$\frac{nx}{n+1}$$

ove il coefficiente della x convergendo verso l'unità per valori infiniti di n, ne viene che si verificherà

$$\lim \frac{nx}{n+1} < 1$$

se $x < 1$, dunque per valori della x compresi fra $+1$, e, -1 sussisterà

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots\dots$$

Le condizioni della convergenza si potranno anche ottenere, analizzando le differenti espressioni del resto; infatti supposto $x > 0$, e < 1, avremo evidentemente per $n = \infty$

$$\lim \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n} = 0$$

Quando x sia negativa, questo primo resto non si presenta sotto una forma propria a riconoscere se conver-

ga verso lo zero, rappresentando infatti la x, per $-x$, non si vede quale dei due termini della frazione

$$\frac{x}{1-\theta x}$$

sia maggiore. Prendendo al contrario la seconda espressione del resto, ed astrazione fatta dal segno, si ridurrà per $x=-x$

$$r_n = \left(\frac{x-\theta_1 x}{1-\theta_1 x}\right)^{n-1} \frac{x}{1-\theta_1 x}$$

la quantità con l' esponente $n-1$ sarà < 1 se x sia < 1; dunque la serie logaritmica è convergente per tutti i valori della x compresi fra 1, e, -1, mentre fra questi stessi limiti, il resto tende verso lo zero. L'esposto modo di dedurre le condizioni della convergenza delle serie del binomio e del logaritmo analizzando le differenti forme dei resti, è desunto dal Corso d' Analisi del sig. Duhamel. Paris 1841.

Sia ancora

$$y = a^x$$

sarà per le derivate nell'ipotesi dei logaritmi iperbolici

$$y' = a^x \log a, \quad y'' = a^x (\log a)^2, \quad y''' = a^x (\log a)^3$$

$$\ldots, \ldots \quad y^{(n)} = a^x (\log a)^n$$

e per $x = o$ divengono

$$y_0 = 1, \quad y'_0 = \log a, \quad y''_0 = (\log a)^2, \ldots y^{(n)} = (\log a)^n \ldots,$$

ed il corrispondente resto

$$r_n = \frac{x^n (\log a)^n}{1.2.3\ldots n} a^{\theta x} = \frac{x^n (\log a)^n (1-\theta_1)^{n-1}}{1.2.3..n-1} a^{\theta_1 x}$$

e perciò

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} \log a + \frac{x^2}{1\,.\,2} (\log a)^2 + \frac{x^3}{1.\,2.\,3} (\log a)^3$$

$$+ \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.\,2.\,3..\, n-1} (\log a)^{n-1} + r_n$$

Ora non è difficile a provarsi che il resto indipendentemente da x, converge sempre verso lo zero per valori infinitamente grandi di n, e perciò qualunque sia x

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} \log a + \frac{x^2}{1.2} (\log a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3} (\log a)^3 + \ldots..$$

Quando a avesse a coincidere con la stessa base e dei logaritmi iperbolici, allora si ha semplicemente

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \ldots.$$

Nelle due serie degli esponenziali, il rapporto di un termine generale al suo antecedente per valori grandissimi di n si riduce ad una quantità piccolissima, la quale converge verso lo zero, e quantunque per $a > e$ $(\log a)^n a^{\theta x}$ cresca a misura che n aumenta, pur tuttavia, come già abbiamo avvertito, $\lim r_n = 0$.

67.° Veniamo ora ad altre applicazioni del Teorema di Mac-Laurin, e che riguardano la trigonometria. Sia

$$y = \operatorname{sen} x$$

si trovò di già al parag. 41

$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

e quindi

$$y_0^{(n)} = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

dalla quale si deduce evidentemente

$$y_o=0\,,\quad y'_o=1\,,\quad y''_o=0\,,\quad y'''_o=-1.\quad y_o^{IV}=0\,,\quad y_o^{V}=1\,....$$

. . . .

e le differenti espressioni del resto saranno

$$r_n=\frac{x^n}{1.\,2.\,3\,..\,n}\operatorname{sen}(\theta x+\frac{n\pi}{2})=\frac{(1-\theta_1)^{n-1}\,x^n}{1.\,2.\,3..\,n-1}\operatorname{sen}(\theta_1 x+\frac{n\pi}{2})$$

Ora qualunque sia n, le funzioni trigonometriche

$$\operatorname{sen}(\theta x+\frac{n\pi}{2})\,,\quad \operatorname{sen}(\theta_1 x+\frac{n\pi}{2})$$

ritengono sempre un valore finito, e perciò la serie

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}-....,$$

sarà convergente per qualsiasi valore reale della x.

Con egual facilità supponendo

$$y=\cos x$$

fu dimostrato che

$$y^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$$

ed insieme

$$y_o^{(n)}=\cos(\frac{n\pi}{2})$$

d'onde

$$y_o=1\,,\quad y'_o=0,\quad y''_o=-1\,,\quad y'''_o=0\,,\quad y_o^{IV}=1\,,\quad y_o^{V}=0\,....$$

e siccome nel valore del resto r_n, le funzioni

$$\cos(\theta x+\frac{n\pi}{2})\,,\quad \cos(\theta_1 x+\frac{n\pi}{2})$$

ritengono costantemente un valore finito, e per conseguenza la serie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \dots$$

rimarrà convergente per valori qualunque dell'arco x.

68.° Sia inoltre

$$y = \text{arc tang } x$$

si ha per la funzione prima derivata

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Per ottenere con più facilità le derivate degli ordini superiori, è meglio decomporre in frazioni semplici la frazion composta che rappresenta la funzione derivata del primo ordine, vale a dire

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x\sqrt{-1}} + \frac{1}{1-x\sqrt{-1}}\right)$$

quindi eseguendo $n-1$ derivazioni si deduce con gran facilità

$$y^{(n)} = (\sqrt{-1})^{n-1}\,\frac{1.2.3..n-1}{2}\left(\left(\frac{1}{1-x\sqrt{-1}}\right)^n - \left(\frac{-1}{1+x\sqrt{-1}}\right)^n\right)$$

e per $x = 0$

$$y_0^{(n)} = \frac{1.\,2.\,3 \dots n-1}{2}\left(1-(-1)^n\right)(\sqrt{-1})^{n-1}$$

d'onde per n pari $y_0^{(n)} = 0$, e per n impari

$$y_0^{(n)} = (1.\,2\;3\,..\,n-1)(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

dalle quali

$$y_0=0,\quad y'_0=1,\quad y''_0=0,\quad y'''_0=-1\,.\,2\,,\quad y_0^{\text{IV}}=0$$

$$y_0^{\text{V}}=1.\,2.\,3.\,4\,,\quad y_0^{\text{VI}}=0\,,\quad \ldots\ldots$$

ed insieme dal valore di $y^{(n)}$ deduciamo le due differenti espressioni del resto

$$r_n=\frac{x^n}{n}\cdot\frac{(\sqrt{-1})^{n-1}}{2}\left(\left(\frac{1}{1-\theta x\sqrt{-1}}\right)^n-\left(\frac{-1}{1+\theta x\sqrt{-1}}\right)^n\right)$$

ovvero

$$r_n=\frac{(\sqrt{-1})^{n-1}}{2}(1-\theta_1)^{n-1}x^n\left(\left(\frac{1}{1-\theta_1 x\sqrt{-1}}\right)^n-\left(\frac{1}{1+\theta_1 x\sqrt{-1}}\right)^n\right)$$

dunque per valori pari di n, si ottiene

$$\text{arc tang}\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\pm\frac{x^{n-1}}{n-1}+r_n$$

ove la forma del resto primitivo sarà

$$r_n=\mp\frac{x^n}{n}\cdot\frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n}-(1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}}$$

e per valori impari di n

$$\text{arc tang}\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\pm\frac{x^{n-2}}{n-2}+r_n$$

e qui pure per la prima espressione del resto sarà

$$r_n=\mp\frac{x^n}{n}\cdot\frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n}+(1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2}$$

i valori fra i quali deve essere compresa la variabile indipendente x, onde la serie sia convergente si possono dedurre non solo dalla ricerca del limite verso il quale converge il rapporto di un termine generale al suo antecedente, ma ben anche dall'osservare quali devono essere questi stessi valori, onde per $n = \infty$, il residuó della serie converga verso lo zero. Ed infatti supponendo n pari il rapporto dei termini

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^{n-1}}{n-1} = \frac{n-1}{n+1} x^2$$

convergerà per $n = \infty$ verso una quantità minore dell'unità se x sia compreso fra $+1$, e, -1; nello stesso modo per n impari il rapporto dei due termini generali per valori infiniti del numero n

$$\frac{x^n}{n} : \frac{x^{n-2}}{n-2} = \frac{n-2}{n} x^2$$

sarà < 1 se x sia $< \pm 1$.

Che se si prendano le due espressioni del resto tanto nell'ipotesi di n pari che nell'ipotesi di n impari, e si faccia inoltre

$$1 + \theta x \sqrt{-1} = \rho\,(\cos\tau + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\tau)$$

ricaveremo nel primo caso

$$r_n = \mp \frac{\cos n\tau}{n} \left(\frac{x}{\rho}\right)^n = \mp \frac{\cos n\tau}{n} \left(\frac{x}{(1+\theta^2 x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^n$$

e per il secondo caso

$$r_n = \mp \frac{\operatorname{sen} n\tau}{n} \left(\frac{x}{\rho}\right)^n = \mp \frac{\operatorname{sen} n\tau}{n} \left(\frac{x}{(1+\theta^2 x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^n$$

Queste due espressioni convergeranno verso lo zero per valori infinitamente grandi di n se la x sia minore dell'unità positiva, o negativa, e per conseguenza fra i limiti $x = 1$, $x = -1$ sussisterà la serie convergente

$$\text{arctang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$$

Da questa formola sarà facile di dedurre il noto rapporto della circonferenza al diametro con maggiore o minor approssimazione, facendo uso di convenienti valori della x.

69.° Indichiamo brevemente una qualche applicazione del Teorema di Taylor.

Quando sia

$$y = f(x), \qquad \text{ed} \qquad y + \Delta y = f(x + h)$$

fu veduto al parag. 63, che

$$y + \Delta y = y + y'\frac{h}{1} + y''\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \ldots + y^{(n-1)}\frac{h^{n-1}}{1.2.3..\,n-1} + r_n$$

ove il residuo assume una delle due forme

$$r_n = \frac{h^n}{1.\,2.\,3\,..\,n} f^{(n)}(x + \theta h) = \frac{(1 - \theta_1)^{n-1}}{1.\,2.\,3..\,n-1} h^n f^{(n)}(x + \theta_1 h)$$

Quando per $n = \infty$ si verifichi $r_n = 0$ allora si ottiene il Teorema di Taylor. Così per esempio supposto successivamente

$$y = x^m, \qquad \text{ed} \qquad y = \log x$$

ed osservando che

$$(x + h)^m = x^m \left(1 + \frac{h}{x}\right)^m$$

$$\log(x + h) = \log x + \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

sì vedrà che le due serie

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + m\,\frac{(m-1)}{1\,.\,2}\,x^{m-2}h^2 + \ldots\ldots$$

$$\log(x+h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots.$$

saranno convergenti per $\frac{h}{x} < 1$: questa medesima conseguenza si potrebbe dedurre per $n = \infty$ dal valore di r_n. Prendendo inoltre

$$y = a^x\,, \qquad y = \text{sen}\,x\,, \qquad y = \cos x$$

si vedrà immediatamente dalla formola di Taylor che lo sviluppo delle tre funzioni

$$a^{x+h}\,, \quad \text{sen}\,(x+h), \quad \cos\,(x+h)$$

secondo le potenze ascendenti della h, vale a dire

$$a^{x+h} = a^x\left(1 + \frac{h}{1}\log a + \frac{h^2}{1\,.\,2}(\log a)^2 + \ldots.\right)$$

$$\text{sen}\,(x+h) = \text{sen}\,x + h\cos x - \frac{h^2}{1.\,2}\,\text{sen}\,x - \frac{h^3}{1.\,2.\,3}\cos x + \ldots$$

$$\cos\,(x+h) = 1 - h\,\text{sen}\,x - \frac{h^2}{1.\,2}\cos x + \frac{h^3}{1.2.3}\,\text{sen}\,x + \ldots..$$

avrà luogo qualunque sieno i valori reali di x, ed h; come potrà verificarsi facendo un'applicazione dei criteri della convergenza delle serie che abbiamo richiamato al parag. 64.

70.° Infine sia

$$y = \text{arc tang}\,x, \qquad \text{ed} \qquad x = \text{tang}\,y$$

si dedurrà dalla formola quarta del parag. 68 dopo di aver sostituito nel secondo membro il valore della

$$x = \text{tang}\, y = \frac{\text{sen}\, y}{\cos y}$$

e nell'ipotesi di n pari

$$y^{(n)} = \pm\ 1.\ 2.\ 3 \ldots n - 1 \cos^n y \,\text{sen}\, n y$$

e nel caso di n impari > 1

$$y^{(n)} = \pm\ 1.\ 2.\ 3 \ldots n - 1 \cos^n y \cos ny$$

Quando n sia pari, e della forma $n = 2\mu$ il segno $+$ avrà luogo per μ pari, ed il segno $-$ per μ impari. Che se n sia impari, e della forma $n = 2\mu + 1$; il segno $+$ sarà egualmente per μ pari, ed il $-$ per μ impari, dunque sotto le condizioni della convergenza della serie

$$\text{arc tang}\,(x + h) = y + \frac{h}{1}\cos^2 y - \frac{h^2}{2}\,\text{sen}\, 2y \cos^2 y$$

$$- \frac{h^3}{3}\cos 3y \cos^3 y + \frac{h^4}{4}\,\text{sen}\, 4y \cos^4 y + \ldots\ldots$$

Chi desiderasse un maggior numero di applicazioni potrà consultare l'opera di Eulero *Institutiones Calculi differentialis* e quella di Lagrange sotto il titolo *Calcul des fonctions*. Fin ad ora abbiamo supposto la funzione, e la variabile reale, ma per mezzo di alcune formole generali date ai parag. 51, e 52 sarà facile di estendere per la funzione, e per la variabile immaginaria sotto determinate condizioni i Teoremi di Taylor, e Mac-Laurin, ma noi per brevità tralascieremo di fare questo nuovo sviluppo, e rimanderemo piuttosto al Calcolo differenziale del sig. Cauchy, od anche a quello del sig. ab. Moigno,

ove questa materia è diffusamente trattata unitamente a diverse altre interessanti ricerche sulla convergenza, e divergenza delle serie immaginarie. Aggiungeremo che la serie dell' esponenziale Neperiano ottenuta alla fine del parag. 67 porge un modo di esprimere simbolicamente per mezzo della caratteristica D ambedue le formole di Taylor, e Mac-Laurin, ed infatti prendendo

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}\,D_x f(x)+\frac{h^2}{1.2}\,D_x^2 f(x)$$

$$+\frac{h^3}{1.2.3}\,D_x^3 f(x)+\ldots\ldots,$$

e considerando la caratteristica D_x come una vera quantità, si avrà

$$f(x+h)=\left(1+\frac{h}{1}D_x+\frac{h^2}{1.2}D_x^2+\frac{h^3}{1.2.3}D_x^3+..\right)f(x)$$

ovvero

$$f(x+h)=e^{hD_x}f(x)$$

Che se pongasi

$$y=f(x),\quad y+\Delta y=f(x+h)$$

avremo ancora

$$\Delta y=(e^{hD_x}-1)\,y$$

Tali sono le diverse forme simboliche per rappresentare la serie di Taylor. Facendo poi $x=0$, e cangiando h in x, si ottengono delle formole simili per la serie di Mac-Laurin.

Supposto infine $h=dx$, si ricaverà

$$\Delta y=(e^{d}-1)\,y$$

In questa serie si dovranno sostituire i valori

$$dy = y'dx \ , \quad d^2y = y''dx \ , \ \ldots . \ d^ny = y^{(n)}\, dx^n \ , \ \ldots .$$

Le derivate y', y'', . . . $y^{(n)}$ sono i coefficienti per i quali si devono moltiplicare le respettive potenze dx, $dx^2 \ldots dx^n$ onde ottenere i respettivi differenziali della y: per questo motivo una derivata $y^{(n)}$ si chiama *il coefficiente differenziale* dell'ordine n. Noi faremo in ultimo un'importante osservazione, che riguarda il retto uso delle medesime formole di Mac-Laurin, e Taylor. In alcuni casi quantunque le serie di Taylor,e Mac-Laurin diano lo sviluppo di una funzione in serie convergente, contuttociò la somma differisce totalmente dalla funzione proposta. Così la funzione

$$e^{-\frac{1}{x^2}}$$

diviene nulla, con tutte le derivate per $x = 0$, e pur tuttavia la funzione non è nulla; quindi se $\varphi(x)$ sia sviluppabile per la formola di Mac-Laurin in serie convergente, la nuova funzione

$$\varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$$

darà parimenti luogo ad una serie convergente; la quale rappresenta il solo sviluppo di $\varphi(x)$, e non già della funzione totale: si potrà però ottenere l'esatto valore della funzione tenendo conto del resto dopo un determinato numero di termini.

Differenziazione delle funzioni di più variabili indipendenti: differenziazione delle funzioni composte. Teorema sulle funzioni omogenee.

71.° Chiamando u una funzione esplicita di più variabili indipendenti x, y, z .... si esprimerà in generale per

$$u = f(x, y, z \ldots)$$

Se alle medesime x, y, z ... si attribuiscano degli aumenti finiti, e variabili, od anche infinitesimi, potrà se la u è continua entro dati limiti delle variabili indipendenti corrispondergli un simile aumento, e denominati al solito per Δx, Δy, Δz, ... gli incrementi delle x, y, z .... e per Δu quello della funzione u, sarà sempre qualunque sia la natura degli incrementi

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z \ldots) - f(x, y, z \ldots)$$

ove se finiti sono Δx, Δy, Δz, ... sarà finita Δu, e se saranno infinitesimi lo sarà anche Δu per la condizione della continuità. Può succedere però che non tutte le variabili ricevano simultaneamente degli incrementi; così variando parzialmente la x, la y, la z, ... i parziali aumenti della u, sarebbero

$$f(x+\Delta x, y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots),\ f(x, y + \Delta y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots)$$

$$f(x, y, z + \Delta z \ldots) - f(x, y, z \ldots),\ \ldots\ldots$$

. . . .

e sarà naturale di poter esprimere queste differenze per li rispettivi simboli $\Delta_x u$, $\Delta_y u$, $\Delta_z u$, ... in modo da

essere

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots)$$

. . . .

e si chiamerà ciascuna, la differenza finita, e parziale della u relativa alla variabile che ha ricevuto l' incremento. Formando poi i rapporti

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \frac{f(x, y + \Delta y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots)}{\Delta y}$$

$$\frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \frac{f(x, y, z + \Delta z \ldots) - f(x, y, z \ldots)}{\Delta z}$$

e supponendo Δx, Δy, Δz, ... infinitesimi, allora i limiti verso i quali convergono gli indicati rapporti saranno le funzioni prime derivate, e parziali riguardo a ciascuna delle variabili x, y, z ...., e dando quelle evidentemente origine a nuove funzioni delle x, y, z ...... così sarà bene notarle per le forme simboliche

$$f'_x(x, y, z \ldots), \quad f'_y(x, y, z \ldots), \quad f'_z(x, y, z \ldots), \ldots\ldots$$

od anche più brevemente per

$$D_x u, \quad D_y u, \quad D_z u, \ldots .$$

quindi esprimendo per $d_x u$, $d_y u$, $d_z u$, ... i differenziali particolari, avremo

$$\frac{d_x u}{dx} = \lim \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = f'_x(x, y, z \ldots) = D_x u$$

$$\frac{d_y u}{dy} = \lim \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = f'_y(x, y, z \ldots) = D_y u$$

$$\frac{d_z u}{dz} = \lim \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = f'_z(x, y, z \ldots) = D_z u$$

. . . .

dalle quali ricaviamo i differenziali

$$d_x u = f'_x (x, y, z \ldots) dx\ , \quad d_y u = f'_y (x, y, z \ldots) dy$$

$$d_z u = f'_z (x, y, z \ldots) dz\ , \ \ldots\ .$$

Queste espressioni sono del tutto conformi a quanto si è stabilito per la differenziazione delle funzioni di una sola variabile.

72.° Per procedere ora alla determinazione del differenziale du, ricorderemo che chiamando α una quantità infinitesima si ha sì per le variabili, che per la funzione

$$dx = \lim \frac{\Delta x}{\alpha}\ , \qquad dy = \lim \frac{\Delta y}{\alpha}\ ,$$

$$dz = \lim \frac{\Delta z}{\alpha}\ , \ \ldots\ . \ du = \lim \frac{\Delta u}{\alpha}$$

perciò riuscirà per quest'ultima

$$du = \lim \frac{f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z\ ,\ \ldots) - f(x, y, z \ldots)}{\alpha}$$

A conoscere questo limite, si riprenda la differenza

$$f(x + \Delta x, y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots)$$

e variando il primo termine di questa riguardo alla y, avremo

$$f(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta y\ ,\ z \ldots) - f(x + \Delta x,\ y, z \ldots)$$

e qui pure variando il primo termine relativamente alla z, otterremo

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z \ldots) - f(x + \Delta x, y + \Delta y, z \ldots)$$

e così successivamente; perciò risulteranno le rispettive

differenze

$$f(x+\Delta x, y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z \ldots) - f(x+\Delta x, y, z \ldots)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z \ldots) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z \ldots)$$

. . . .

ciascuna delle quali, se ha per limite zero converrà che anche la lor somma

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x, y, z \ldots)$$

converga per valori nulli di Δx, Δy, Δz, ... al medesimo limite. Ciò posto chiamando I, H, K, ... alcune quantità infinitesime la prima delle quali svanisca per $\Delta x = 0$, la seconda per $\Delta y = 0$, la terza per $\Delta z = 0$, ... e tutte sieno funzioni delle x, y, z .... ed in particolare degli incrementi Δx, $(\Delta x, \Delta y)$, $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ .... sarà per una formola di già dimostrata al parag. 26.

$$f(x+\Delta x, y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots) = \Delta x \left(f'_x(x, y, z \ldots) + \mathrm{I}\right)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z \ldots) - f(x+\Delta x, y, z \ldots)$$
$$= \Delta y \left(f'_y(x+\Delta x, y, z \ldots) + \mathrm{H}\right)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z \ldots) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z \ldots)$$
$$= \Delta z \left(f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z \ldots) + \mathrm{K}\right)$$

. . . .

quindi la lor somma

$$\Delta u = \Delta x \left(f'_x(x, y, z \ldots) + \mathrm{I}\right) + \Delta y \left(f'_y(x+\Delta x, y, z \ldots) + \mathrm{H}\right)$$

$$+ \Delta z \left(f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z \ldots) + \mathrm{K}\right) + \ldots\ldots$$

ove diviso tutto per α, e passando ai limiti si ottiene.

$$du = f'_x(x, y, z \dots)\, dx + f'_y(x, y, z..)\, dy + f'_z(x, y, z..)\, dz + \dots$$

ovvero per l'ultime formole del precedente parag.

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \dots ,$$

dalla quale si ricava che il differenziale completo du è eguale alla somma dei differenziali parziali relativa a ciascuna variabile indipendente $x, y, z, \dots$ Qui noteremo che le derivate parziali

$$D_x u = \frac{d_x u}{dx},\ D_y u = \frac{d_y u}{dy},\ D_z u = \frac{d_z u}{dz},\ \dots .$$

per un uso comunemente adottato si scrivono semplicemente per

$$\frac{du}{dx},\quad \frac{du}{dy},\quad \frac{du}{dz}, \dots .$$

ed in conseguenza i differenziali parziali dovranno rappresentarsi per

$$d_x u = \frac{du}{dx} dx,\quad d_y u = \frac{du}{dy} dy,\quad d_z u = \frac{du}{dz} dz,\quad \dots .$$

quindi il differenziale totale delle u si porrà il più delle volte sotto la forma

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots .$$

Per mantenere poi l'esattezza nello scrivere le derivate, e i differenziali parziali delle funzioni, non sarà più lecito di eseguire una riduzione nelle espressioni

$$\frac{du}{dx} dx,\qquad \frac{du}{dy} dy,\qquad \frac{du}{dz} dz, \dots .$$

a meno che non si rimpiazzi il rispettivo differenziale parziale

$$d_x u,\quad d_y u,\quad d_z u, \ldots\ldots$$

In fine a scanzo di equivoci, noteremo che ogni qual volta si dovrà dividere il differenziale completo du per i rispettivi differenziali dx, dy, dz, ... si scriverà

$$\frac{1}{dx}du,\qquad \frac{1}{dy}du,\qquad \frac{1}{dz}du,\ \ldots$$

Così volendo applicare le precedenti formole ad un qualche esempio si troverà con gran facilità

$$d(x+y+z)=dx+dy+dz \qquad d(x-y)=dx-dy$$

$$d\,(ax+by+cz)=adx+bdy+cdz$$

$$d\,xyz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx-xdy}{y^2}$$

e nella stessa guisa

$$d\,x^y = yx^{y-1}dx + x^y \log x\, dy$$

$$d\,(x+y\sqrt{-1}) = dx + dy\sqrt{-1}$$

$$d\,e^{x+y\sqrt{-1}} = e^{x+y\sqrt{-1}}\,(dx+dy\sqrt{-1})$$

Dagli esposti esempi risulta che il differenziare una somma, una differenza, un prodotto, un quoto di variabili indipendenti è lo stesso che differenziare una somma, una differenza, un prodotto, un quoto di funzioni di una sola variabile; le medesime regole poi sussistono per gli esponenti tanto a base che ad esponente variabile,

ed in generale la regola che si era di già stabilita per la differenziazione di una funzione di funzioni di una sola variabile indipendente, sussiste per la differenziazione di una funzione di più variabili indipendenti.

73.° Sia s una funzione di funzioni di più variabili indipendenti, vale a dire pongasi

$$s = F(u, v, w \dots)$$

ed insieme

$$u = f(x, y, z \dots), \quad v = \varphi(x, y, z \dots), \quad w = \psi(x, y, z \dots)$$

si avrà per la differenza totale della s

$$\Delta s = \Delta u\,(F_u'(u, v, w \dots) + I) + \Delta v\,(F_v'(u, v, w \dots) + H)$$

$$+ \Delta w\,(F_w'(u, v, w \dots) + K) + \dots$$

In questa formola Δu, Δv, Δw .... sono le differenze complete delle funzioni, u, v, w ... riguardo a tutte le variabili x, y, z .... e le quantità I, H, K, ... devono svanire per $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$, $\Delta w = 0$, ... Dalla differenza infinitesima Δs si passerà immediatamente al differenziale, quando dividendo il primo, e secondo membro per l'infinitesimo α, e passando ai limiti, si rifletta alle consuete definizioni

$$ds = \lim \frac{\Delta s}{\alpha}, \quad du = \lim \frac{\Delta u}{\alpha}, \quad dv = \lim \frac{\Delta v}{\alpha}, \quad dw = \lim \frac{\Delta w}{\alpha}, \dots$$

ed avremo

$$ds = F_u'(u, v, w \dots)\,du + F_v'(u, v, w \dots)\,dv + F_w'(u, v, w \dots)\,dw + \dots$$

Ognun vede che questa formola coincide con quella ottenuta nell'antecedente parag. nell'ipotesi che u, v, w... fossero variabili indipendenti. Si osservò inoltre che per

le u, v, w, ... funzioni delle indipendenti x, y, z, ... si ha

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \ldots, \quad dv = d_x v + d_y v + d_z v + \ldots.$$

$$dw = d_x w + d_y w + d_z w + \ldots.$$

perciò sostituendo questi valori, e ponendo per brevità

$$D_u s = F_u'(u, v, w \ldots), \quad D_v s = F_v'(u, v, w \ldots)$$

$$D_w s = F_w'(u, v, w \ldots), \ldots$$

risulterà per il differenziale della s,

$$\begin{aligned} ds = & D_u s\, d_x u + D_v s\, d_x v + D_w s\, d_x w + \ldots \\ & + D_u s\, d_y u + D_v s\, d_y v + D_w s\, d_y w + \ldots \\ & + D_u s\, d_z u + D_v s\, d_z v + D_w s\, d_z w + \ldots \end{aligned}$$

Ma dalla differenziazione delle funzioni di funzioni di una sola variabile, e di già stabilita al parag. 37 abbiamo

$$d_x s = D_u s\, d_x u + D_v s\, d_x v + D_w s\, d_x w + \ldots$$

$$d_y s = D_u s\, d_y u + D_v s\, d_y v + D_w s\, d_y w + \ldots$$

$$d_z s = D_u s\, d_z u + D_v s\, d_z v + D_w s\, d_z w + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dunque infine per le funzioni di funzioni riuscirà

$$ds = d_x s + d_y s + d_z s + \ldots\ldots$$

Da tutto l'esposto ne segue che la differenziazione delle funzioni composte è soggetta alle medesime regole della differenziazione delle funzioni semplici. Supponendo in

particolare che la s si riduca ad

$$s = F(u)$$

e per il simbolo F si prendano successivamente tutte le diverse forme delle funzioni semplici, otterremo altrettanti risultati simili a quelli del parag. 33. Lo stesso accade se per $F(u, v, w \dots)$ si assumano le diverse funzioni composte, come già si è fatto per le funzioni di una sola variabile nei parag. 36-38: i nuovi risultati sono del tutto identici di forma, sia che u, v, w . . . rappresentino funzioni di una sola, o di più variabili indipendenti: noi per brevità omettiamo di fare questo nuovo dettaglio che non contiene difficoltà alcuna nell' esecuzione.

74.° La differenziazione delle funzioni a più variabili conduce finalmente alla dimostrazione di un importante teorema sulle funzioni omogenee, e che noi verremo brevemente ad indicare.

Quando nel differenziale

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \dots .$$

di una funzione omogenea u si sostituiscano x, y, z, ... invece di dx, dy, dz, ... il primo membro si trasformerà nel prodotto nu, ove n indica il grado della funzione; ed infatti supponendo

$$u = f(x, y, z \dots)$$

una funzione omogenea delle x, y, z, ... dovrà questa esser tale che sostituito tx, ty, tz, ... invece delle x, y, z ... si verifichi

$$f(tx, ty, tz \dots) = t^n (f(x, y, z \dots))$$

Si determini ora la derivata riguardo alla nuova variabile ausiliare t, otterremo evidentemente

$$f'_{tx}(tx, ty, tz \ldots)\, x + f'_{ty}(tx, ty, tz \ldots)\, y$$

$$+ f'_{tz}(tx, ty, tz \ldots)\, z \ldots = nt^{n-1} f(x, y, z \ldots)$$

nella quale facendo $t = 1$; diverrà

$$f'_x(x, y, z \ldots)\, x + f'_y(x, y, z \ldots)\, y + f'_z(x, y, z \ldots) z = n f(x, y, z \ldots)$$

o ciò che torna lo stesso

$$\frac{du}{dx} x + \frac{du}{dy} y + \frac{du}{dz} z + \ldots = nu$$

In questa formola trovasi l'enunciato della proposizione. Così per esempio nella funzione omogenea del secondo grado

$$u = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy)$$

si ha

$$du = (Ax + Ez + Fy)\, dx + (By + Dz + Fx)\, dy + (Cz + Dy + Ex) dz$$

e per conseguenza

$$(Ax + Ez + Fy)\, x + (By + Dz + Fx)\, y + (Cz + Dy + Ex)\, z = 2u$$

come si vede immediatamente dal valore di u.
Così anche nella funzione

$$u = \frac{x}{y}$$

di grado nullo abbiamo

$$du = \frac{y\, dx - x\, dy}{y^2}$$

d'onde

$$\frac{yx - xy}{y^2} = 0$$

In tutti i precedenti ragionamenti abbiamo supposto le variabili indipendenti x, y, z ... reali, ma non sarà difficile di estendere questi risultati al caso delle variabili x, y, z ... e dei differenziali dx, dy, dz, ... immaginari; mentre entro dati valori reali od immaginari della x, y, z ... potremo sempre avere

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z \ldots) - f(x, y, z \ldots)$$

quindi se gli incrementi immaginari, Δx, Δy, Δz ... Δu si dividano per l'infinitesimo α reale, e si passi ai limiti, otterremo l'espressione di du in qualunque ipotesi delle variabili o reali, od immaginarie: lo stesso potrà succedere nella differenziazione delle funzioni composte.

Derivate, e differenziali degli ordini superiori delle funzioni di più variabili. Espressioni simboliche delle medesime.

75.° Rimanendo sempre fisso che l'espressioni simboliche

$$d_x u,\quad d_y u,\quad d_z u,\ \ldots\ldots$$

abbiano a rappresentare i differenziali parziali della funzione u, riguardo alle variabili x, y, z, ... e che nel medesimo tempo le derivate parziali del primo ordine sieno notate dai rapporti

$$\frac{du}{dx} = f'_x(x, y, z \ldots) = D_x u,\quad \frac{du}{dy} = f'_y(x, y, z \ldots) = D_y u$$

$$\frac{du}{dz} = f'_z(x, y, z \ldots) = D_z u$$

in modo che

$$\frac{du}{dx}dx = d_x u\,,\qquad \frac{du}{dy}dy = d_y u\,,\qquad \frac{du}{dz}dz = d_z u\,,\ \ldots$$

sarà facile nell'ipotesi di dx, dy, dz . . . costanti formare le derivate successive, e parziali riguardo alle variabili x, y, z .... allora i successivi differenziali

$$d_x\,d_x u\,,\quad d_y\,d_y u\,,\quad d_z\,d_z u\,,\ \ldots\ldots$$

si scriveranno in termini più abbreviati per le consuete notazioni

$$d_x^2 u\,,\quad d_y^2 u\,,\quad d_z^2 u\,,\ \ldots.$$

ed in generale per

$$d_x^n u\,,\quad d_y^n u\,,\quad d_z^n u\,,\ \ldots.$$

i differenziali parziali dell'ordine n^{esimo} relativi alle x, y, z, ... ; quindi anche le derivate parziali del medesimo ordine si noteranno per

$$D_x^n u = f_x^{(n)}(x, y, z\,..),\ D_y^n u = f_y^{(n)}(x, y, z\,...)$$

$$D_z^n u = f_z^{(n)}(x, y, z...),...$$

Le medesime in rapporti differenziali si esprimeranno per

$$\frac{d^n u}{dx^n}\,,\quad \frac{d^n u}{dy^n}\,,\quad \frac{d^n u}{dz^n}\,,\ \ldots\ldots$$

in modo da essere costantemente

$$d_x^n u = \frac{d^n u}{dx^n}dx^n\,,\quad d_y^n u = \frac{d^n u}{dy^n}dy^n\,,\quad d_z^n u = \frac{d^n u}{dz^n}dz^n\,,...$$

Non sono però queste, le sole circostanze nelle quali u possa successivamente differenziarsi.

76.° Le derivate parziali sono altrettante funzioni delle variabili x, y, z, ... e per conseguenza $d_x u$ potrà nella sua generalità differenziarsi riguardo alla y, o z... come la $d_y u$ riguardo alla x, o z .... Questa successiva differenziazione si esprimerà giusto il consueto per

$$d_y\, d_x\, u\,, \qquad d_x\, d_y\, u$$

e la successiva derivazione per

$$D_y\, D_x u\,, \qquad D_x\, D_y\, u$$

ovvero per

$$f_{x,}{}''_{y}(x,\, y,\, z\, ...)\,, \quad f_{y,}{}''_{x}(x,\, y,\, z\, ...)$$

o finalmente in termini differenziali

$$\frac{d\,\frac{du}{dx}}{dy}\,, \qquad \frac{d\,\frac{du}{dy}}{dx}$$

quali nell'ipotesi di dx, dy, dz, ... costanti si ridurranno ad

$$\frac{d^2 u}{dx\, dy}\,, \qquad \frac{d^2 u}{dy\, dx}$$

Nella stessa guisa l'espressioni

$$D_y\, D_x^2 u = \frac{d^3 u}{dx^2\, dy}\,, \quad D_z\, D_y\, D_x u = \frac{d^3 u}{dx\, dy\, dz}$$

$$D_x\, D_y^2 u = \frac{d^3 u}{dy^2\, dx}$$

indicano successive derivazioni, o semplici, o ripetute, e relative alle variabili x, y, z, ...

Riprendiamo adesso le differenze parziali

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x,\ y,\ z\ \ldots) - f(x,\ y,\ z\ \ldots)$$

$$\Delta_y u = f(x,\ y + \Delta y,\ z\ \ldots) - f(x,\ y,\ z\ \ldots)$$

e facendo variare la y nella prima, e la x nella seconda, avremo

$$\Delta_y\, \Delta_x u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z\ \ldots) - f(x,\ y + \Delta y,\ z\ \ldots)$$
$$- f(x + \Delta x\ ,\ y,\ z\ \ldots) + f(x,\ y,\ z \ldots)$$

$$\Delta_x\, \Delta_y u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z\ \ldots) - f(x + \Delta x,\ y,\ z\ \ldots)$$
$$- f(x,\ y + \Delta y,\ z\ \ldots) + f(x,\ y,\ z\ \ldots)$$

dalle quali si deduce

$$\Delta_y\, \Delta_x\, u = \Delta_x\, \Delta_y u$$

D'altronde rammentandoci sempre che

$$d_x u = \lim \frac{\Delta_x u}{\alpha}\ , \qquad d_y u = \lim \frac{\Delta_y u}{\alpha}\ , \ \ldots$$

si otterrà per un primo rapporto

$$\frac{\Delta_y \dfrac{\Delta_x u}{\alpha}}{\alpha} = \frac{\Delta_x \dfrac{\Delta_y u}{\alpha}}{\alpha}$$

e passando ai limiti, verrà

$$d_y\, d_x\, u = d_x\, d_y\, u$$

come per le derivate

$$D_y\, D_x u = D_x\, D_y u\ , \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{d^2 u}{dx\, dy} = \frac{d^2 u}{dy\, dx}$$

Queste ultime formole ci dicono che è lecito d'invertere l'ordine del differenziale, e della derivata riguardo alle variabili x, y, z ...; proseguendo questi ragionamenti per i differenziali, e derivate di un ordine superiore al secondo, dovremo avere egualmente

$$d_x\, d_y\, d_z u = d_y\, d_x^2 u = d_x^2\, d_y\, u\,, \quad . \; . \; .$$

$$d_x^3\, d_y\, d_z u = d_x\, d_y\, d_z\, d_x^2 u = d_x\, d_y\, d_x\, d_z\, d_x u = \, . \; . \; . \; . \; .$$

dei quali le corrispondenti derivate porgeranno

$$\frac{d^3 u}{dx\, dy\, dx} = \frac{d^3 u}{dx^2\, du} = \frac{d^3 u}{dy\, dx^2}$$

$$\frac{d^5 u}{dx^3\, dy\, dz} = \frac{d^5 u}{dy\, dz\, dx^3} = \frac{d^5 u}{dy\, dx^3\, dz} = \frac{d^5 u}{dx^2\, dy\, dx\, dz} = \ldots$$

Generalizzando infine tutte queste notazioni dedurremo

$$d_x^l\; d_y^m\; d_z^n \ldots u = d_y^m\; d_x^l\; d_z^n \ldots u = d_z^n\; d_y^m\; d_x^l \ldots u = \ldots.$$

del quale la corrispondente derivata, darà

$$D_x^l\, D_y^m\, D_z^n \ldots u = D_y^m\, D_x^l\, D_z^n \ldots u = D_z^n\, D_y^m\, D_x^l \ldots u = \ldots.$$

E siccome i differenziali $d_x^l u$, $d_y^m u$, $d_z^n u$, ... sono eguali ciascuno ad una nuova funzione delle variabili x, y, z... moltiplicata per dx^l, dy^m, dz^n, ... così il differenziale dell'ordine $l + m + n + \ldots.$ cioè $d_x^l\; d_y^m\; d_z^n \ldots u$ . . . . sarà eguale ad una funzione delle medesime x, y, z, ... moltiplicato per il prodotto $dx^l\; dy^m\, dz^n$ ... ossia

$$d_x^l\; d_y^m\; d_z^n \ldots u = \Phi\,(x,\; y,\; z\; \ldots)\, dx^l\, dy^m\, dz^n \; . \; . \; . \; .$$

quindi la derivata dell'ordine $l+m+n+\ldots$ della u si esprimerà per

$$\Phi(x,\ y,\ z\ldots)=\frac{d^{l+m+n+\ldots}u}{dx^l\,dy^m\,dz^n\ldots}$$

purchè s' intendano eseguite, l differenziazioni relative ad x, m ad y, ed n a z,... questa ultima formola non è diversa da

$$D_z^n\,D_y^m\,D_x^l\ldots u=\frac{d^{l+m+n+\ldots}}{dx^l\,dy^m\,dz^n\ldots}$$

77.° Le stabilite nozioni sulle derivate, e differenziali parziali degli ordini superiori sono necessarie, e sufficienti per inoltrarci nella differenziazione successiva, e totale della funzione u, e che si ridurrà alla determinazione di d^2u, d^3u, d^4u, ... d^nu. Ed infatti rammentandoci, che il differenziale totale di una funzione di più variabili indipendenti è sempre eguale alla somma dei differenziali parziali, ed osservando che la differenziazione d_xu, d_yu, d_zu, ... da origine a nuove funzioni delle x, y, z... si avrà primieramente per il differenziale secondo totale

$$d^2u=d_x\,du+d_y\,du+d_z\,du+\ldots.$$

e sostituendoci il valore completo di du,

$$\begin{aligned}d^2u=\ &d_x\,(d_xu+d_yu+d_zu+\ldots.)\\&+d_y\,(d_xu+d_yu+d_zu+\ldots.)\\&+d_z\,(d_xu+d_yu+d_zu+\ldots.)\end{aligned}$$

Differenziando nel modo che viene qui indicato riescirà con gran facilità

$$d^2u=d_x^2u+d_y^2u+d_z^2u+\ldots+2d_x\,d_yu+2d_xd_zu+2d_y\,d_zu+\ldots$$

nella quale prendendo dx, dy, dz costanti si può mettere anche sotto la forma delle derivate

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 + \ldots$$

$$+ 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + 2\frac{d^2u}{dx\,dz}dx\,dz + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}dy\,dz + \ldots,$$

ove però non possiamo cancellare le potenze di dx, dy, dz, ... dai termini $\frac{d^2u}{dz^2}dx^2$, ... a meno che non vengano rimpiazzati gli effettivi valori d_x^2u, ...
Per la formazione del differenziale terzo si avrà egualmente

$$d^3u = d_x\,d^2u + d_y\,d^2u + d_z\,d^2u + \ldots.$$

nella quale sostituendoci d^2u, eseguendo le indicate differenziazioni, e riducendo si troverà

$$d^3u = d_x^3u + d_y^3u + \ldots + 3d_x^2\,d_yu + 3dx\,d_y^2u + \ldots$$

In un modo del tutto simile si giunge ai differenziali di ordine più elevato, ed esporremo quanto prima un metodo semplicissimo per ottenere in tutti i casi il differenziale di un ordine qualunque di una funzione di più variabili indipendenti, e basterà per ora notare che ai valori di d^2u, d^3u, ... riguardo al numero dei termini, ai coefficienti ed agli esponenti di dx, dy, dz .... corrisponde la legge del binomio di Newton. In una funzione composta

$$s = F(u, v, w \ldots)$$

ed u, v, w .... sono funzioni delle x, y, z ..... si hà come già si è dimostrato per differenziale del primo ordine

$$ds = \frac{ds}{du}du + \frac{ds}{dv}dv + \frac{ds}{dw}dw + \ldots.$$

Venendo ad una seconda differenziazione si dovrà tener conto anche della variabilità di du, dv, dw, ... per cui

$$d^2s = \frac{d^2s}{du^2}\,du^2 + \frac{d^2s}{dv^2}\,dv^2 + \ldots + 2\,\frac{d^2s}{du\,dv}\,du\,dv$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{ds}{du}\,d^2u + \frac{ds}{dv}\,d^2v + \ldots\ldots$$

La differenziazione di ordine più elevato si prosegue con lo stesso processo. Così dati

$$s = u + v\ ,\qquad s = u + v\sqrt{-1}$$

troveremo

$$d^n\,(u + v) = d^nu + d^nv$$

$$d^n\,(u + v\sqrt{-1} = d^nu + d^nv\sqrt{-1}$$

Si può far meno di tener conto della variabilità di du, dv, dw, ... se u, v, w .... sono funzioni lineari delle variabili x, y, z ... mentre per

$$u = ax + by + cz + \ldots + k$$

si ha

$$d^2u = a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z + \ldots = 0$$

qualunque d'altronde sieno le costanti o reali, od immaginarie. L'ipotesi di u, v, w .... funzioni lineari delle x, y, z .... ci condurrebbe ad estendere per casi più generali alcuni risultati ottenuti al parag. 43, e che riguardano la differenziazione successiva di un prodotto di funzioni, ma di questo parleremo in breve qualunque sia la natura delle medesime funzioni u, v, w .....

78.° La differenziazione delle funzioni di più variabili indipendenti può riportarsi alla differenziazione delle funzioni di una sola variabile mediante alcuni ar-

tifizi, che sarà ben di conoscere. Si rappresentino per

$$\alpha\, dx\,,\quad \alpha\, dy,\quad \alpha\, dz\,,\, \ldots$$

gli incrementi delle variabili x, y, z . . . . . ed α sia un infinitesimo, e si consideri la variazione della funzione, come funzione della α in modo da essere

$$F(\alpha) = f\,(x + \alpha dx\,,\ y + \alpha dy\,,\ z + \alpha dz\,, \ldots .)$$

Per eseguire le derivazioni riguardo ad α nel secondo membro di questa equazione basterà ricorrere ai metodi di già stabiliti al parag. 37 per la differenziazione delle funzioni di funzioni di una sola variabile, avvertendo di più che le derivate della medesima riguardo alle variabili

$$x + \alpha\, dx\,,\quad y + \alpha\, dy,\quad z + \alpha\, dz, \ldots .$$

coincidono con le derivate riguardo alle variabili x, y, z, ... ; così otterremo

$$F'(\alpha) = f'_x\,(x + \alpha dx\,,\ y + \alpha dy\,,\ z + \alpha dz, \ldots)\, dx$$

$$+ f'_y\,(x + \alpha dx\,,\ y + \alpha dy\,,\ z + \alpha dz, \ldots)\, dy$$

$$+ f'_z\,(x + \alpha dx\,,\ y + \alpha dy\,,\ z + \alpha dz, \ldots)\, dz$$

. . . .

d'onde ponendo $\alpha = 0$ si ricaverà

$$F(0) = u\,,\quad F(\alpha) - F(0) = \Delta u$$

quindi dividendo la seconda per α, e passando ai limiti

$$F'(0) = \lim \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = \lim \frac{\Delta u}{\alpha} = du$$

Nella stessa guisa per la differenziazione successiva si avrà

$$F''(o) = \lim \frac{F'(\alpha) - F'(o)}{\alpha} = \lim \frac{\Delta\, du}{\alpha} = d^2u$$

$$F'''(o) = \lim \frac{F''(\alpha) - F''(o)}{\alpha} = \lim \frac{\Delta\, d^2u}{\alpha} = d^3u$$

ed in generale

$$F^{(n)}(o) = \lim \frac{F^{(n-1)}(\alpha) - F^{(n-1)}(o)}{\alpha} = \lim \frac{\Delta\, d^{n-1}u}{\alpha} = d^nu$$

Tal'è uno dei metodi più semplici, che si possa immaginare per la differenziazione di un qualsiasi ordine delle funzioni di più variabili. Riassumendo le trovate formole, si raccoglie che ponendo

$$F(\alpha) = f(x + \alpha\, dx\,,\ y + \alpha\, dy\,,\ z + \alpha\, dz, \ldots)$$

ed

$$u = f(x,\ y,\ z \ldots)$$

si ha per la funzione, e per le derivate

$$u = F(o)\,,\ du = F'(o)\,,\ d^2u = F''(o)\,,\ \ldots\ d^nu = F^{(n)}(o)$$

Queste differenti espressioni, con le quali la differenziazione delle funzioni di più variabili dipende dalla differenziazione delle funzioni di una sola variabile ci saranno molto utili per la risoluzione di diverse questioni, ed in particolare, per svilnppare in serie le funzioni medesime secondo le potenze ascendenti di date variabili.

79.° L'analogia fra le potenze, e differenze si adopra anche utilmente per semplificare in diversi punti la differenziazione successiva delle funzioni di più variabili: questa analogia consiste nell'assoggettare alle operazioni algebriche le caratteristiche della differenziazione e derivazione come se fossero vere quautità: in que-

sto modo verremo ad ottenere altrettante espressioni simboliche, le quali mostreranno immediatamente l'operazione analitica da eseguirsi sopra la funzione. Un qualche esempio ne abbiamo già dato nei parag. 43 e 44 nella differenziazione delle funzioni di una sola variabile, ed ora estenderemo la teoria a più variabili. Riprendendo infatti il valore del differenziale completo

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \dots,$$

e considerando le caratteristiche d_x, d_y, $d_z \dots$ come se fossero vere quantità, otterremo per du l'espressione simbolica

$$du = (d_x + d_y + d_z + \dots) u$$

Per il differenziale secondo completo fu trovato

$$d^2u = d_x^2 u + d_y^2 u + d_z^2 u + \dots + 2d_x\, d_y u + 2d_x\, d_z u + 2d_y\, d_z u + \dots$$

quale evidentemente ritiene si nelle caratteristiche che nei coefficienti la legge del quadrato di un polinomio, quindi il valor simbolico del differenziale secondo sarà

$$d^2u = (d_x + d_y + d_z + \dots)^2 u$$

A questo risultato possiamo anche giungerci direttamente differenziando il valore simbolico di du, e si avrebbe

$$d^2u = (d_x + d_y + d_z + \dots) du,$$

ovvero

$$d^2u = (d_x + d_y + d_z + \dots) (d_x + d_y + d_z \dots) u$$

le quale coincide con quella di già riportata. Proseguendo questo ragionamento per la ricerca del differenziale di un ordine n^{esimo} qualunque, ricaveremo per il valore simbolico del medesimo

$$d^n u = (d_x + d_y + d_z + \dots)^n u$$

Le riferite forme simboliche indicano chiaramente l'operazione da eseguirsi sopra la funzione u, quando per gli esponenti di d_x, d_y, d_z .... s'intendano dopo lo sviluppo ordini di differenziazioni.

80.° In una funzione di funzioni

$$s = F(u, v, w \ldots.)$$

u, v, w .... contenendo le variabili indipendenti x, y, z... si dedusse

$$ds = d_x s + d_y s + d_z s + \ldots.$$

ovvero per i simboli adottati si scriverà

$$ds = (d_x + d_y + d_z + \ldots.) s$$

Qui pure generalizzando la formola per un ordine n di differenziazione si avrà

$$d^n s = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^n s$$

Per applicare queste diverse formole ad un qualche esempio, prendiamo

$$s = u v$$

otterremo per una prima differenziazione

$$d\, uv = (d_x + d_y + d_z + \ldots) uv$$

Ora in forza di ciò che si è detto al parag. 43 per la differenziazione dei prodotti, abbiamo

$$d_x u v = (d_x + d_x) u v, \quad d_y u v = (d_y + d_y) u v$$

$$d_z u v = (d_z + d_z) u v, \ldots.$$

sostituendo questi valori, e riflettendo che

$$du = (d_x + d_y + d_z + \ldots.) u$$

$$dv = (d_x + d_y + d_z + \ldots.) v$$

dedurremo per l'espressione simbolica del differenziale completo del prodotto uv

$$\mathrm{d}\,uv = (\mathrm{d} + \mathrm{d})\,uv$$

quando il primo d si riferisca alla u, ed il secondo alla v, o viceversa. Al medesimo risultato si giunge più rapidamente, coll'osservare che qualunque sieno le funzioni u, v

$$\mathrm{d}\,uv = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$$

d'onde si otterrà l'indicata forma simbolica. Una nuova differenziazione dell'espressione simbolica, porge

$$\mathrm{d}^2 uv = (\mathrm{d} + \mathrm{d})\,\mathrm{d}\,uv = (\mathrm{d} + \mathrm{d})\,(\mathrm{d} + \mathrm{d})\,uv$$

e più semplicemente

$$\mathrm{d}^2 uv = (\mathrm{d} + \mathrm{d})^2\,uv$$

ed in generale per il numero n intero

$$\mathrm{d}^n uv = (\mathrm{d} + \mathrm{d})^n uv.$$

Un risultato simile si estende per il prodotto di più funzioni, cioè

$$\mathrm{d}^n\, u\,v\,w \ldots = (\mathrm{d} + \mathrm{d} + \mathrm{d} + \ldots)^n\, u\,v\,w \ldots$$

Qui anche dopo lo sviluppo ciascuna caratteristica d, dee riguardare una sola delle funzioni u, v, w .... Supponiamo in un caso particolare

$$u = e^{rx+sy+tz+\ldots}, \quad v = f(x, y, z \ldots)$$

avremo dall'ultima trovata formola e dalle analogie dimostrate al parag. 44 per le derivate parziali degli or-

dini n, m, p .... relative alle x, y, z ....

$$D_x^n e^{rx+sy+tz+\cdots} f(x, y, z \ldots) = e^{rx+sy+tz+\cdots} (r + D_x)^n v$$

$$D_y^m e^{rx+sy+tz+\cdots} f(x, y, z \ldots) = e^{rx+sy+tz+\cdots} (s + D_y)^m v$$

$$D_z^p e^{rx+sy+tz+\cdots} f(x, y, z \ldots) = e^{rx+sy+tz+\cdots} (t + D_z)^p v$$

. . . . . .

d'onde

$$D_z^p D_y^m D_x^n \ldots e^{rx+sy+tz+\cdots} f(x, y, z \ldots)$$

$$= e^{rx+sy+tz+\cdots} (r + D_x)^n (s + D_y)^m (t + D_z)^p \ldots f(x, y, z \ldots)$$

ed in generale se $F(r, s, t \ldots)$ sia una funzione intera delle r, s, t .... dedurremo con facilità

$$F(D_x, D_y, D_z \ldots) e^{rx+sy+tz+\cdots} f(x, y, z \ldots)$$

$$= e^{rx+sy+tz+\cdots} F(r + D_x, s + D_y, t + D_z \ldots) f(x, y, z \ldots)$$

Questa formola che avrà luogo quando anche $F(r, s, t..)$ sia una funzione razionale si adopra con molta utilità per l'integrazione dell'equazioni lineari a derivate parziali. Termineremo di parlare dei differenziali delle funzioni esplicite di più variabili col richiamare un'importante proprietà della quale deve godere un differenziale du, onde provenga da una data funzione u. Si rappresentino per A, B, C .... le derivate parziali del primo ordine riguardo alle variabili x, y, z ... cosicchè sia

$$A = D_x u, \quad B = D_y u, \quad C = D_z u, \; \ldots$$

e per le quali

$$du = D_x u \, dx + D_y u \, dy + D_z u \, dz + \ldots$$

Quante volte sia data la funzione u dovrà verificarsi

$$D_y D_x u = D_x D_y u\ ,\ D_x D_z u = D_z D_x u\ ,\ D_y D_z u = D_z D_y u \ldots$$

ovvero per i valori di A , B , C ....

$$D_y A = D_x B\ ,\quad D_z A = D_x C\ ,\quad D_z B = D_y C \ldots.$$

Queste equazioni, che servono a conoscere se du sia un differenziale esatto, si sogliono chiamare il *criterio* del medesimo differenziale. Nuove altre equazioni di condizioni, o *criteri* per distinguere se $d^n u$ sia un differenziale esatto dell'ordine n si potrebbero stabilire, ma di queste parleremo altrove, e ci tratteremo piuttosto nella differenziazione delle funzioni implicite, o dell'equazioni.

Differenziazione dell'equazioni.

81.° Se la consueta funzione u delle variabili x, y, z . . . acquista un valore nullo, o costante, allora la generica relazione, o funzione implicita

$$u = f(x,\ y,\ z \ldots) = C$$

è ciò che chiamasi *Equazione:* in ambedue i casi di $u = o$, o di $u = C$ dovrà verificarsi

$$du = o$$

e per conseguenza

$$D_x u\, dx + D_y u\, dy + D_z u\, dz + \ldots = o$$

la quale si dirà *Equazione differenziale* del primo ordine. Se le variabili si riducono a due, per cui

$$D_x u\, dx + D_y u\, dy = o$$

indicherà il differenziale della funzione implicita

$$f(x, y) = C$$

ove y essendo una funzione della x si avrà col porre

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

dall'equazione differenziale

$$D_x u + D_y u \, y' = 0$$

d'onde

$$y' = -\frac{D_x u}{D_y u}$$

Ognun vede come la derivata della funzione si esprima per le derivate dell'equazione. Supponendo che le variabili x, y, z ... si riducano a tre, potrà una di queste, z assumersi per funzione delle altre in modo che per

$$z = \varphi(x, y)$$

si abbia

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

p, p, sono le derivate parziali

$$p = D_x z \;, \qquad q = D_y z$$

Sostituendo adunque il valore di dz nell'*equazione differenziale*, e raccolti i termini che moltiplicano i differenziali dx, dy, si ricaverà

$$(D_x u + p\, D_z u)\, dx + (D_y u + q\, D_z u)\, dy = 0$$

Ora le x, y essendo indipendenti, lo saranno altresì i loro differenziali, e perciò dovrà verificarsi separatamente

$$D_x u + p\, D_z u = 0 \;, \quad D_y u + q\, D_z u = 0$$

d'onde

$$p = -\frac{D_x u}{D_z u}\ ,\qquad q = -\frac{D_y u}{D_z u}$$

Queste espressioni porgono le derivate parziali della funzione per le derivate parziali dell'equazione.

82.° La derivazione successiva di queste equazioni, o funzioni implicite si prosegue con la stessa facilità: così trattandosi di due variabili, e supposto per la funzione

$$u = f(x, y) = C$$

e per le derivate

$$D_x^n u = u^{(n)},\ D_y^n = u_{(n)}\quad D_x^m D_y^n = u_{(n)}^{(m)}$$

si avrà da una prima, e seconda derivazione

$$u' + u_1 y' = 0$$

$$u'' + u_1' y' + (u_1' + u_{11} y') y' + u_1 y'' = 0$$

d'onde da una successiva sostituzione

$$y' = -\frac{u'}{u_1}\ ,\ y'' = -\frac{(u'' u_1^2 - 2u_1' u' u_1 + u_{11} u'^2)}{u_1^3}$$

. . . .

Quando sieno tre variabili x, y, z ... si avrà per il differenziale secondo dell'equazione nell'ipotesi di dx, dy costanti

$$D_x^2 u\, dx^2 + D_y^2 u\, dy^2 + D_z^2 u\, dz^2 + 2D_x D_y u\, dx\, dy$$

$$+ 2D_x D_z u\, dx\, dz + 2D_y D_z u\, dy\, dz + D_z u\, d^2 z = 0$$

alla quale per l'indipendenza delle x, y dovrà congiungersi oltre il valore di dz determinato nel parag. ante-

cedente anche

$$d^2z = r\,dx^2 + t dy^2 + 2s\,dx\,dy$$

ove

$$r = D_x^2 z\ ,\quad t = D_y^2 z\ ,\quad s = D_x D_y z$$

Con la sostituzione di questi valori il differenziale completo di second'ordine $d^2u = 0$ risulterà di tre sistemi di termini moltiplicati per dx^2, dy^2, $dx\,dy$, ciascuno dei quali per l'indipendenza di dx, dy darà luogo separatamente a tre equazioui a differenze parziali del secondo ordine

$$D_x^2 u + p^2 D_z^2 u + 2p\,D_x D_z u + r\,D_z u = 0$$

$$D_y^2 u + q^2 D_z^2 u + 2q\,D_y D_z u + t\,D_z u = 0$$

$$pq\,D_z^2 u + D_x D_y u + q\,D_x D_z u + p\,D_y D_z u + s\,D_z u = 0$$

Con la stessa regola si giungerebbe ad equazioni a differenze parziali del terzo ordine. Queste equazioni servono per eliminare un certo numero di costanti che si contengono in una data equazione finita. Così per esempio data per $u = 0$ l'equazione finita del primo ordine

$$u = ax + by + c - z = 0$$

avremo

$$D_x u = a\ ,\quad D_y u = b\ ,\quad D_z u = -1$$

e le due equazioni a derivate parziali del primo ordine ottenute alla fine del parag. antecedente forniscono

$$a - p = 0 \qquad b - q = 0$$

ossia

$$a = p\ ,\quad b = q$$

d'onde risulterà l'equazione finita

$$px + qy + c - z = 0$$

priva delle due costanti a, b. Riguardo al numero delle costanti da eliminarsi sarà bene notare, che se tre sieno le variabili x, y, z vincolate da una equazione, o funzione implicita, avremo due equazioni a derivate parziali del primo ordine, tre del secondo, quattro del terzo, ed in generale $n+1$ dell'ordine n^{esimo}, cosicchè il numero totale dell'equazioni a derivate parziali sarà evidentemente la somma dei numeri naturali

$$2+3+4+5+\dots+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$$

e per conseguenza dall'equazione finita data, e dalle totali equazioni a derivate parziali si potranno eliminare $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ costanti, e risulterà quindi un' equazione a derivate parziali dell'ordine n^{esimo}, e priva dell' indicato numero di costanti. Se le variabili sono quattro, otterremo tre equazioni a derivate parziali del primo ordine, sei del secondo, dieci del terzo, quindici del quarto .... quali essendo i numeri triangolari, si avranno per il termine generale dei medesimi $\frac{(n+1)\,n+2)}{1\,.\,2}$ equazioni a derivate parziali dell'ordine n^{esimo}, e quindi la somma totale

$$3+6+10+\dots+\frac{(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2}=\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3}-1$$

dunque si potrà arrivare ad una equazione a derivate parziali, e dell'ordine n^{esimo} dalle quali sieno state eliminate $\frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3}-1$ costanti. In generale data un'equazione fra m variabili si potrà sempre formare un'equazione a derivate parziali dell'ordi-

ne n^{esimo} la quale risulti dall'eliminazione di

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m-1}-1$$

costanti contenute in altrettante equazioni.

83.° L'equazioni a derivate parziali si adoprano anche utilmente per l'eliminazione delle funzioni arbitrarie. Supponiamo infatti

$$u=f(\varphi(v),\ y,\ z)=o$$

e sia

$$r=\varphi(v)=\chi(x,\ y),\qquad z=f(x,\ y)$$

avremo per l'equazione $u=o$, e per le due funzioni r,z

$$D_x u\ dx+D_y u\ dy+D_z u\ dz+D_r u\ dr=o$$

$$dr=D_x r\ dx+D_y r\ dy,\quad dz=p\ dx+q\ dy$$

Eliminati i valori di dr, dz dall'equazione differenziale per mezzo della sostituzione risulteranno per l'indipendenti di dx, dz le due equazioni

$$D_r u\ D_x r+D_x u+p\ D_z u=o$$

$$D_r u\ D_y r+D_y u+q\ D_z u=o$$

ove sostituendo

$$D_x r=\varphi'(v)\ D_x v,\quad D_y r=\varphi'(v)\ D_y v$$

si trasformeranno in

$$\varphi'(v)\ D_r u\ D_x v+D_x u+p\ D_z u=o$$

$$\varphi'(v)\ D_r u\ D_y v+D_y u+q\ D_z u=o$$

In queste due equazioni trovasi ancora nelle derivate parziali $D_x u$, $D_y u$, $D_z u$ la funzione arbitraria $\varphi(v)$ per

cui con la $u = o$ si eliminerà dalle medesime la $\varphi(v)$, ed in seguito l'altra $\varphi'(v)\,D_v u$: si giungerà così ad un' equazione a derivate parziali del primo ordine priva di arbitraria funzione. Nell'ipotesi che fra le due funzioni

$$u = \psi\,(x, y, z)\,, \quad v = \chi\,(x, y, z)$$

sussista la relazione

$$u = \varphi(v)$$

e ritenendo sempre che

$$z = f(x, y)$$

sarà facile l'eliminazione dell'arbitraria funzione φ. Differenziando parzialmente le u, v riguardo ad x, y si ottiene

$$D_x u + p\,D_z u = \varphi'(v)\,(D_x v + p\,D_z v)$$

$$D_y u + q\,D_z u = \varphi'(v)\,(D_y v + q\,D_z v)$$

Dividendo la prima per la seconda, riducendo al medesimo denominatore, e ponendo per brevità

$$R = D_x u\,D_y v - D_x v\,D_y u\,, \quad P = D_z v\,D_y u - D_y v\,D_z u$$

$$Q = D_x v\,D_z u - D_x u\,D_z v$$

risulterà

$$Pp + Qq = R$$

Qnest'equazione a derivate parziali del primo ordine, e priva della funzione arbitraria s'incontra nelle applicazioni del calcolo infinitesimale alla geometria. Così nel caso di

$$u = z\,, \quad v = \frac{y}{x}\,, \quad \text{e} \quad z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

si troverà

$$P = -\frac{1}{x}\,, \quad Q = -\frac{y}{x^2}\,, \quad R = o$$

d'onde

$$p x + q y = 0$$

Che se fosse dato

$$u = z\,, \quad v = x^2 + y^2\,, \quad \text{e} \quad z = \mathrm{f}\,(x^2 + y^2)$$

allora

$$\mathrm{P} = -2y\,, \quad \mathrm{Q} = 2x\,, \quad \mathrm{R} = 0$$

d'onde verrà l'equazione a derivate parziali del primo ordine

$$p y - q x = 0$$

84.° L'eliminazione delle funzioni arbitrarie si rende più laboriosa, aumentandone il numero. Per mostrarne un qualche esempio sia

$$z = x\varphi(v) + \psi(v)$$

e v funzione delle x, y. Prendendo le derivate parziali riguardo ad x, ed y, otteniamo secondo le consuete denominazioni

$$p = \varphi(v) + x\varphi'(v)\,\mathrm{D}_x v + \psi'(v)\,\mathrm{D}_x v$$

$$q = x\varphi'(v)\,\mathrm{D}_y v + \psi'(v)\,\mathrm{D}_y v$$

Moltiplicandole respettivamente per le derivate $\mathrm{D}_y v$, $\mathrm{D}_x v$, e sottraendole, svaniranno le $\varphi'(v)$ $\psi'(v)$, e si avrà

$$p\,\mathrm{D}_y v - q\,\mathrm{D}_x v = \varphi(v)\,\mathrm{D}_y v$$

Proseguendo le derivazioni parziali riguardo ad x, ed y, e ponendo sempre

$$r = \mathrm{D}_x^2 z\,, \quad s = \mathrm{D}_x\,\mathrm{D}_y z\,, \quad t = \mathrm{D}_y^2 z$$

si ricaverà

$$r\mathrm{D}_y v + p\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y v - s\mathrm{D}_x v - q\mathrm{D}_x^2 v = \varphi(v)\,\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y v + \varphi'(v)\,\mathrm{D}_x v\;\mathrm{D}_y v$$

$$p\mathrm{D}_y^2 v + s\mathrm{D}_y v - q\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y v - t\,\mathrm{D}_x v = \varphi(r)\,\mathrm{D}_y^2 v + \varphi'(v)\,(\mathrm{D}_y v)^2$$

Per eseguire più speditamente l' eliminazione delle due funzioni $\varphi'(v)$, $\varphi(v)$ si rappresentino i primi membri di queste due ultime equazioni per M, N, e moltiplicando la prima per $D_y v$, e la seconda per $D_x v$, e sottraendole avremo

$$M\,D_y v - N\,D_x v = \varphi(v)\,(\,D_y v\,.\,D_x\,D_y v - D_x v\,(D_y v)^2\,)$$

D'altronde dalla prima equazione a derivate parziali si ricava

$$\varphi(v) = \frac{p\,D_y v - q\,D_x v}{D_y v}$$

dunque finalmente

$$(MD_y v - ND_x v)\,D_y v = (\,pD_y v - qD_x v)\,(D_y v\,D_x D_y v - D_x v (D_y v)^2\,)$$

Tal'è l'equazione a derivate parziali del second'ordine, non lineare, priva delle due funzioni arbitrarie $\varphi(v)$, $\psi(v)$ che si contenevano nell' equazione finita. In alcuni casi un semplice paragone delle derivate di diversi ordini basta per eliminare le funzioni arbitrarie.

Data per esempio

$$z = f_0(\,x + kx\,) + f_1(\,y - kx\,)$$

ed eseguite due derivazioni parziali, risulterà

$$D_x^2 z = k^2\,(\,f_0''(y + kx) + f_1''(y - kx)\,)$$

$$D_z^2 z = f_0''(\,y + kx\,) + f_1''\,(\,y - kx\,)$$

dalle quali viene l'equazione

$$D_x^2 z = k^2\,D_y^2 z$$

la quale s' incontra in differenti questioni interessanti della fisica Matematica, ed in particolare sulla vibrazione di una corda sonora.

Più generalmente data l'equazione

$$z = \frac{k}{y^2}\varphi(u) - \frac{k}{y}\varphi'(u) + \frac{k}{y}\psi'(v) - \frac{k}{y^2}\psi(v)$$

ove per brevità

$$u = y + kx, \qquad v = y - kx$$

ed φ', ψ' sono le derivate da φ, ψ. Da una prima derivazione si ottiene

$$D_x z = \frac{k^2}{y^2}(\varphi'(u) + \psi'(v)) - \frac{k^2}{y}(\varphi''(u) + \psi''(v))$$

$$D_y z = \frac{k}{y}(\varphi'(u) - \psi'(v)) - \frac{k}{y}(\varphi''(u) - \psi''(v))$$
$$- \frac{2k}{y^3}(\varphi(u) - \psi(v))$$

Proseguendo le derivazioni parziali avremo con la stessa facilità

$$D_x^2 z = \frac{k^3}{y^2}(\varphi''(u) - \psi''(v)) - \frac{k^3}{y}(\varphi'''(u) - \psi'''(v))$$

$$D_y^2 z = \frac{2k}{y^2}(\varphi''(u) - \psi''(v)) - \frac{k}{y}(\varphi'''(u) - \psi'''(v))$$
$$- \frac{6k}{y^3}(\varphi'(u) - \psi'(v)) + \frac{k}{y^2}(\varphi''(u) - \psi''(v))$$
$$+ \frac{6k}{y^4}(\varphi(u) - \psi(v))$$

Formando ora l'espressioni

$$\frac{2}{y}D_y z, \quad -\frac{2z}{y^2}, \quad \text{e sommate con } D_y^2 z$$

ricaveremo

$$D_y^2 z + \frac{2}{y}D_y z - \frac{2z}{y^2} = \frac{k}{y^2}(\varphi''(u) - \psi''(v)) - \frac{k}{y}(\varphi'''(u) - \psi'''(v))$$

Ora il secondo membro moltiplicato per k^2, verrà eguale precisamente a $D_x^2 z$, dunque in fine

$$D_x^2 z = k^2\left(D_y^2 z + \frac{2}{y} D_y z - \frac{2z}{y^2}\right)$$

Quest' equazione a derivate parziali del second' ordine s'incontra nella teoria del suono e serve a determinare le vibrazioni dell'aria in un tubo conico.

85.° Nel porre termine alla differenziazione dell' equazioni, sarà molto utile di fare una qualche riflessione sulla differenza, che passa fra l'eliminazione delle costanti, e l'eliminazione delle funzioni. Nell' eliminare le funzioni per mezzo dell'equazioni differenziali è evidente, che si dà origine a nuove funzioni arbitrarie φ', φ'', ... ψ', ψ'', ... che sono le derivate da φ, ψ, . . . dunque per l'eliminazione delle funzioni si richiederà un maggior numero di equazioni di quelle, che si richiedono per l'eliminazione delle costanti: supponendo pertanto m il numero delle variabili x, y, z... e μ il numero delle funzioni φ, ψ, χ. ..... verranno ad ottenersi per la successiva derivazione, le nuove funzioni arbitrarie φ', ψ', χ', ... φ'', ψ'', χ'', ... cosicchè trovando n equazioni a derivate parziali, il total numero delle funzioni corrisponderà evidentemente al prodotto $\mu\,(n+1)$ d'altronde tutto il numero dell'equazioni differenziali è

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\,.\,.\,.\,(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m-1}$$

dunque da tutte queste equazioni si potrà dedurre un' equazione a derivate parziali dell'ordine n, e priva di funzioni arbitrarie quante volte si verifichi

$$\mu(n+1) < \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\,......\,(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,m-1}$$

Così per le tre variabili x, y, z, o per $m = 3$ si avrà $\mu < \frac{n+2}{2}$, ovvero $n + 1 > 2\mu - 1$; le differenziazioni si avranno ad eseguire fino all'ordine $2\mu - 1$: ammettendo due funzioni arbitrarie ossia $\mu = 2$, converrebbe differenziare tre volte per poter eliminare le funzioni. Questo però incontra una qualche eccezione se si rifletta che in alcuni casi più funzioni arbitrarie svaniscono simultaneamente, allora la differenziazione potrebbe esser sufficiente fino all'ordine $2\mu - 2$.
Tanto si verifica nella formola

$$z = x\,\varphi(v) + \psi(v)$$

ed in qualcun'altra che abbiamo riportata, ove si presentava una particolar disposizione delle funzioni: del resto nella generalità il numero μ delle funzioni deve verificare la condizione di sopra accennata, vale a dire

$$\mu < \frac{(n+2)\,(n+3)\ldots(n+m-1)}{1.\,2.\,3\ldots m-1}$$

Sul cangiamento di variabili nei differenziali, e derivate di un ordine qualunque delle funzioni di più variabili, e sulle funzioni differenziali alternate.

86.° Diverse interessanti questioni di Meccanica razionale, e di fisica Matematica conducono a certe equazioni a derivate parziali, nelle quali la variabile principale u è funzione di quattro variabili indipendenti che si ridurranno a tre coordinate rettilinee, ed al tempo t. Ora per giungere alla determinazione di questa funzione principale u la quale soddisfi nel medesimo tempo

all' equazione data, e per qualche valore particolare delle variabili indipendenti a condizioni date, si rende indispensabile una trasformazione di coordinate in altri sistemi di coordinate con le quali possa più facilmente aversi la spiegazione dei fenomeni. Avuto riguardo all' utilità che presenta questo cangiamento, crediamo di doverci fermare per un poco mostrandone qualche applicazione ad alcuni casi particolari.

87.° Data pertanto la consueta funzione

$$u = f(x, y, z \dots)$$

supporremo che le x, y, z .... sieno funzioni di altre variabili r, p, q .... in numero eguali alle precedenti; si domandano i differenziali du, d^2u, d^3u, . . . e quindi le derivate $D_x u$, $D_x^2 u$, $D_x^3 u$, ... espressi per i differenziali, e derivate parziali dei diversi ordini relativi alle nuove variabili r, p, q . . . . . La risoluzione della questione si presenta naturalmente, qualora si osservi, che le r, p, q, ... dovranno essere reciprocamente funzioni delle x, y, z ... in modo da porre

$$r = \varphi(x, y, z \dots), \; p = \psi(x, y, z \dots), \; q = \chi(x, y, z \dots),$$

. . . .

In questa guisa la u, diverrà in generale funzione delle nuove variabili r, p, q, ... cosicchè porremo

$$u = F(r, p, q, \dots)$$

Ciò posto da una prima differenziazione dei due valori della u, otteniamo

$$du = D_x u\, dx + D_y u\, dy + D_z u\, dz + \dots$$

$$du = D_r u\, dr + D_p u\, dp + D_q u\, dq + \dots$$

Per rendere identici i secondi membri di queste due equazioni, e dedurne quindi i valori delle derivate $D_x u$, $D_y u$, $D_z u$,... in funzione delle nuove $D_r u$, $D_p u$, $D_q u$,... basterà differenziare le r, p, q . . . sostituirle nella seconda espressione di du, ed eseguire un confronto con la prima, e si avrà primieramente

$$dr = D_x r\, dx + D_y r\, dy + D_z r\, dz + \ldots .$$

$$dp = D_x p\, dx + D_y p\, dy + D_z p\, dz + \ldots .$$

$$dq = D_x q\, dx + D_y q\, dy + D_z q\, dz + \ldots .$$

. . . .

Facendo adunque l'indicata sostituzione e paragone, avremo con facilità

$$D_x u = D_r u\, D_x r + D_p u\, D_x p + D_q u\, D_x q + \ldots$$

$$D_y u = D_r u\, D_y r + D_p u\, D_y p + D_q u\, D_y q + \ldots$$

$$D_z u = D_r u\, D_z r + D_p u\, D_z p + D_q u\, D_z q + \ldots$$

. . . . . .

Nei secondi membri le derivate parziali $D_x r$, $D_x p$, ... sono nuove funzioni delle variabili r, p, q . . . . infine della sola eliminazione si potrebbero ottenere le derivate $D_r u$, $D_p u$, $D_q u$, . . . in funzione di $D_x u$, $D_y u$, $D_z u$, purchè si considerino le x, y, z . . . . . funzioni delle r, p, q .... Per mostrare una qualche applicazione, supponiamo le variabili x, y, z .... ridotte a tre coordinate ortogonali, e le r, p, q ..... a tre coordinate polari, e congiunte fra di loro per mezzo delle cognite formole

$$x = r \cos p\,, \quad y = r \operatorname{sen} p \cos q\,, \quad z = r \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q$$

ed avremo dalle medesime

$$r = x^2 + y^2 + z^2 \,,\quad \cos p = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

$$\mathrm{tang}\, q = \frac{z}{y}$$

d'onde i tre valori espliciti delle r, p, q, cioè

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,\quad p = \mathrm{arc\,cos}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$q = \mathrm{arc\,tang}\,\frac{z}{y}$$

Ora da una derivazione parziale delle r, p, q riguardo a ciascuna delle x, y, z, e da una sostituzione dei valori di x, y, z si trova

$$D_x r = \cos p\,,\quad D_y r = \mathrm{sen}\, p \cos q\,,\quad D_z r = \mathrm{sen}\, p\, \mathrm{sen}\, q$$

$$D_x p = -\frac{\mathrm{sen}\, p}{r}\,,\quad D_y p = \frac{\cos p \cos q}{r}\,,\quad D_z p = \frac{\cos p\, \mathrm{sen}\, q}{r}$$

$$D_x q = 0\,,\quad D_y q = -\frac{\mathrm{sen}\, q}{r\, \mathrm{sen}\, p}\,,\quad D_z q = \frac{\cos q}{r\, \mathrm{sen}\, p}$$

e sostituiti nelle formole generali sarà

$$D_x u = \cos p\, D_r u - \frac{\mathrm{sen}\, p}{r} D_p u\,.$$

$$D_y u = \mathrm{sen}\, p \cos q\, D_r u + \frac{\cos p \cos q}{r} D_p u - \frac{\mathrm{sen}\, q}{r\, \mathrm{sen}\, p} D_q u$$

$$D_z u = \mathrm{sen}\, p\, \mathrm{sen}\, q\, D_r u + \frac{\cos p\, \mathrm{sen}\, q}{r} D_p u + \frac{\cos q}{r\, \mathrm{sen}\, p} D_q u$$

Qui pure eliminando le r, p, q si otterrebbero le derivate $D_r u$, $D_p u$, $D_q u$ in funzione di $D_r u$, $D_y u$, $D_z u$.

88.° Proseguendo le differenziazioni, e derivazioni successive, avremo per il differenziale secondo totale di u relativo alle variabili x, y, z ... la forma simbolica

$$d^2 u = (dx\, D_x + dy\, D_y + dz\, D_z +)^2 u$$

considerando poi la u funzione delle p, q, r dipendenti dalle x, y, z . . . , sarà per la variabilità di dr, dp, dq

$$d^2u = (dr\, D_r + dp\, D_p + dq\, D_q + \dots)^2 u$$

$$+ (d^2r\, D_r + d^2p\, D_p + d^2q\, D_q + \dots) u$$

D'altronde i differenziali secondi di r, p, q . . . daranno egualmente

$$d^2r = (dx\, D_x + dy\, D_y + dz\, D_z \dots)^2 r$$

$$d^2p = (dx\, D_x + dy\, D_y + dz\, D_z \dots)^2 p$$

$$d^2q = (dx\, D_x + dy\, D_y + dz\, D_z \dots)^2 q$$

. . . .

Facendo adunque la sostituzione di questi valori nel secondo membro di d^2u, eseguendo tutti gli indicati sviluppi simbolici, e paragonando i termini, affetti dalle medesime potenze di dx, dy, dz . . . nel primo valore di d^2u, ricaveremo tutte le derivate del second' ordine D_x^2u, . . . espresse per le nuove derivate D_r^2u, . . . Qui pure una prima parte di queste espressioni si porrà sotto l'indicata forma simbolica, ed avremo

$$D_x^2u = (D_xr\, D_r + D_xp\, D_p + D_xq\, D_q + \dots)^2 u$$

$$+ (D_x^2r\, D_r + D_x^2p\, D_p + D_x^2q\, D_q + \dots) u$$

$$D_y^2u = (D_yr\, D_r + D_yp\, D_p + D_yq\, D_q + \dots)^2 u$$

$$+ (D_y^2r\, D_r + D_y^2p\, D_p + D_y^2q\, D_q + \dots) u$$

$$D_z^2u = (D_zr\, D_r + D_zp\, D_p + D_zq\, D_q + \dots)^2 u$$

$$+ (D_z^2r\, D_r + D_z^2p\, D_p + D_z^2q\, D_q + \dots) u$$

Questi valori si sarebbero anche ottenuti immediatamente dalla seconda formola di questo parag. col mutare i differenziali totali d^2u, dr, . . . d^2r, . . . nelle derivate parziali $D_x^2 u$, . . . $D_x r$, . . . $D_x^2 r$, . . .

Il medesimo confronto poi delle due espressioni di d^2u, porge ancora le derivate successive $D_x\, D_y u$, . . . e si ricaverà

$$D_x\, D_y u = D_r^2 u\, D_x r\, D_y r + D_p^2 u\, D_x p\, D_y p + D_q^2 u\, D_x q\, D_y q + \ldots$$
$$+ D_r\, D_p u\, (\, D_x r\, D_y p + D_y r\, D_x p\,)$$
$$+ D_r\, D_q u\, (\, D_x r\, D_y q + D_y r\, D_x q\,)$$
$$+ D_p\, D_q u\, (\, D_x p\, D_y q + D_y p\, D_x q\,)$$
$$+ D_r u\, D_x\, D_y r + D_p u\, D_x\, D_y p + D_q u\, D_x\, D_y q + \ldots\ldots$$

e così per le altre da un semplice cangiamento delle x, y, in x; z, ed y, z . . .

Ritenendo che le x, y, z, sieno tre coordinate ortogonali, ed r, p, q . . . tre coordinate polari, si ricaverà da una successiva derivazione delle $D_x r$, . . . di già ottenute nell'antecedente parag.

$$D_x^2 r = \frac{\text{sen}^2 p}{r}\,, \quad D_y^2 r = \frac{\cos^2 p + \text{sen}^2 p\, \text{sen}^2 q}{r}$$

$$D_z^2 r = \frac{\cos^2 p + \text{sen}^2 p \cos^2 q}{r}$$

$$D_x^2 p = \frac{2\, \text{sen}\, p \cos p}{r^2}\,, \quad D_y^2 p = \frac{\cos p\, (\, \text{sen}^2 q - 2 \cos^2 q\, \text{sen}^2 p\,)}{r^2 \text{sen}\, p}$$

$$D_z^2 p = \frac{\cos p\, (\, \cos^2 q - 2\, \text{sen}^2 p\, \text{sen}^2 q\,)}{r^2 \text{sen}\, p}$$

$$D_x^2 q = 0, \quad D_y^2 q = \frac{2 \text{sen}\, q \cos q}{r^2 \text{sen}^2 p}\,, \quad D_z^2 q = -\, \frac{2 \text{sen}\, q \cos q}{r^2 \text{sen}^2 p}$$

Nella stessa guisa si ha

$$D_x D_y r = -\frac{\text{sen}\,p\cos p\cos q}{r},\quad D_x D_z r = -\frac{\text{sen}\,p\cos p\,\text{sen}\,q}{r}$$

$$D_y D_z r = -\frac{\text{sen}^2 p\,\text{sen}\,q\cos q}{r^2},\quad D_x D_y p = -\frac{\cos q\cos 2p}{r^2}$$

$$D_x D_z p = -\frac{\text{sen}\,q\cos 2p}{r^2},\ D_y D_z p = -\frac{\cos p\,\text{sen}\,q\cos q\,(1+2\text{sen}^2 p)}{r^2\text{sen}\,p}$$

$$D_x D_y q = o,\quad D_x D_z q = o,\quad D_y D_z q = -\frac{\cos^2 q}{r^2\text{sen}^2 p}$$

Noi per brevità ci dispenseremo di trascrivere le espressioni $D_x^2 u, \ldots D_x D_y u, \ldots$ che si otterrebbero dopo la sostituzione di queste derivate parziali... $D_x^2 r, \ldots$ $D_x D_y r, \ldots$ Nello stesso modo si proseguono le differenziazioni, e derivazioni terze, quarte... L'uso principale di questi cangiamenti di variabili, si trova per l'integrazione dell'equazioni a derivate parziali. Spesse volte nelle applicazioni dell'analisi alla Fisica Matematica, conviene sostituire alle coordinate rettilinee x, y, z, ... delle altre coordinate, che i geometri chiamano *curvilinee*; ma per queste diverse trasformazioni si possono consultare in particolare diverse interessanti Memorie del sig. Lamé inserite nel 24° fascicolo del giornale della scuola politecnica, e nel tomo 2°, e 4° del giornale di Matematica del sig. Liouville, ... ove si fa uso anche di queste trasformazioni per determinare certi integrali definiti duplicati, e triplicati.

89.° Se una funzione differenziale di più variabili cangia di segno conservando vicino al segno il medesimo valore, mentre si cangiano fra di loro due qualunque delle variabili che racchiude, allora si chiama que-

stà una *funzione differenziale alternata*. Fra le funzioni di questa specie noi sceglieremo quelle che si chiamano *risultanti* e che s'incontrano nel cangiamento di variabili eseguito sui differenziali delle funzioni.

Ritenendo pertanto per x, y, z ... le n variabili indipendenti, e per r, p, q ... altre n variabili congiunte alle prime per n equazioni date, noi potremo considerare le r, p, q ... come funzioni delle variabili indipendenti x, y, z ... e calcolare sotto quest'ipotesi le derivate del primo ordine, che racchiudono i diversi termini del tablò

$$D_x p\,,\quad D_y p\,,\quad D_z p\,,\ \ldots\ldots$$

$$D_x q\,,\quad D_y q\,,\quad D_z q\,,\ \ldots\ldots$$

$$D_x r\,,\quad D_y r\,,\quad D_z r\,,\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ciò posto se si formi il prodotto

$$D_x p\; D_y q\; D_z r \ldots\ldots$$

con i diversi termini che porge una delle diagonali del tablò, e si faccia uso come fa il sig. Cauchy della notazione

$$S\,[\pm D_x p\,,\ D_y q\; D_z r \ldots]$$

per indicare la somma fatta dal prodotto parziale $D_x p\, D_y q\; D_z r$ ... e da tutti quei nei quali si trasforma quando si cangiano fra di loro una, o più volte di seguito le variabili x, y, z ... prese a due, a due e cangiando ciascuna volta il segno del prodotto ottenuto, allora l'indicata espressione si chiamerà la *risultante* dei termini compresi nel tablò, e diverrà evidentemente una funzione differenziale alternata, rapporto alle variabili x, y, z... Per dedurre poi gli uni dagli altri i diversi ter-

mini di questa risultante, basterà di cangiar fra di loro, e le variabili x, y, z ... o le funzioni p, q, r ... Nella stessa guisa considerando le x, y, z ... come funzioni delle variabili p, q, r ..., la risultante formata con i diversi termini del tablò

$$\begin{array}{llll} D_p x, & D_q x, & D_q x, & \ldots \\ D_p y, & D_q y, & D_q y, & \ldots \\ D_p z, & D_q z, & D_r z, & \ldots \end{array}$$

e rappresentata per la notazione

$$S\,[\pm D_p x\, D_q y\, D_r z \ldots]$$

sarà una funzione differenziale alternata rapporto alle variabili p, q, r...

Sarà ora facile di scuoprire una bella relazione che passa fra le due indicate *risultanti*: infatti per i differenziali di primo ordine delle p, q, r ... considerate come funzioni delle x, y, z ... abbiamo

$$dp = D_x p\, dx + D_y p\, dy + D_z p\, dz + \ldots .$$

$$dq = D_x q\, dx + D_y q\, dy + D_z q\, dz + \ldots .$$

$$dr = D_x r\, dx + D_y r\, dy + D_z r\, dz + \ldots .$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

dalle quali eliminando successivamente dx, dy, dz ... ricaviamo dei risultati della forma

$$dx = \frac{X}{K}, \quad dy = \frac{Y}{K} \ldots\ldots$$

ove come si conosce dalla risoluzione dell'equazioni di primo grado

$$K = S\,[\pm D_x p\, D_y q\, D_z r \ldots]$$

similmente considerando le x, y, z . . . come funzioni delle p, q, r . . . avremo

$$dx = D_p x \, dp + D_q x \, dq + D_r x \, dr + \dots$$

$$dy = D_p y \, dp + D_q y \, dq + D_r y \, dr + \dots$$

$$dz = D_p z \, dp + D_q z \, dq + D_r z \, dr + \dots$$

. . . .

Queste pure risolute riguardo a dp, dq, dr, porgeranno

$$dp = \frac{X_1}{K_1}, \quad dq = \frac{Y_1}{K_1}$$

ove

$$K_1 = S\,[\pm D_p x \, D_q y \, D_r z \dots]$$

Ma dalla risoluzione dell'equazioni determinate si conosce che se n variabili x, y, z . . . sono congiunte ad altre n variabili p, q, r . . . per n equazioni lineari e supponendo le une espresse in funzione lineari delle altre, e reciprocamente, le due risultanti formate con i coefficienti che racchiuderanno queste funzioni lineari nelle due ipotesi, offriranno un prodotto eguale all'unità; questa proposizione ci porta subito a stabilire

$$KK_1 = 1$$

ovvero

$$S\,[\pm D_x p \, D_y q \, D_z r \dots] \,.\, S\,[D_p x \, D_q y \, D_r z \dots] = 1$$

Questa formola trovasi in una Memoria del sig. Jacobi inserita nel tom. 22 del giornale del sig. Crelle 1841 pag. 337. Non solo poi queste due risultanti porgono un prodotto eguale all'unità, ma ciascuna di esse si può esprimere anche per il rapporto di due altre: ma per questa nuova relazione si può consultare la citata Memoria del sig. Jacobi, od anche una Memoria del sig. Cauchy pubblicata nel 18.° fascicolo degli Esercizi d'analisi, e di Fisica Matematica, e dal quale abbiamo estratto quanto si è esposto sulle funzioni differenziali alternate.

Dei Massimi e Minimi delle funzioni di più variabili.

90.° La consueta funzione

$$u = f(x, y, z \dots)$$

che per un dato sistema di valori

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \dots$$

acquisti un particolar valore reale che superi tutti i valori reali vicini, vale a dire tutti quei che si otterrebbero facendo variare le x, y, z ... di quantità piccolissime positive, e negative, allora questo particolar valore della funzione u si dirà massimo, od un *maximum.* Che se la funzione u è reale, ed inferiore a tutti i valori reali vicini, si dirà un *minimo* od anche un *minimum* il valore particolare della u.

Sieno

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$$

gli aumenti infinitamente piccoli delle variabili indipendenti x, y, z ... è facile il vedere che per un dato sistema di valori delle medesime x, y, z ... dovrà verificarsi nel caso del massimo

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) < f(x, y, z \dots)$$

come nel caso del minimo

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) > f(x, y, z \dots)$$

qualunque d'altronde sieno i segni di Δx, Δy, Δz, ...

Si sostituiscano ora agli incrementi Δx, Δy, Δz, ... le quantità

$$\alpha\,dx\,,\quad \alpha\,dy\,,\quad \alpha\,dz\,\ldots$$

e si consideri qual funzione dell'infinitesimo α l'espressione

$$F(\alpha)=f(x+\alpha dx\,,\ y+\alpha dy\,,\ z+\alpha dz\,,\ldots)$$

è evidente che nell'ipotesi del massimo per valori prossimi ad a, b, c ...

$$F(\alpha)<F(o)$$

come per il minimo

$$F(\alpha)>F(o)$$

qualunque d' altronde sia il segno della α. Con queste due ineguaglianze la ricerca dei massimi e minimi delle funzioni di più variabili viene riportata ai massimi, e minimi delle funzioni di una sola variabile, quindi non sarà difficile il concludere, che quante volte

$$F(o)=f(x,\ y,\ z\ldots,)=u$$

e la sua derivata sieno continue, si avrà per la condizione del massimo e del minimo

$$F'(\alpha)=o$$

ponendo dopo la derivazione $\alpha=o$, e siccome

$$F'(o)=du=D_x u\,dx+D_y u\,dy+D_z u\,dz+\ldots$$

così sarà generalmente

$$D_x u\,dx+D_y u\,dy+D_z u\,dz+\ldots=o$$

Quando tutte le variabili x, y, z .... sieno indipendenti, avremo necessariamente per le derivate parziali

$$D_x u=o\,,\quad D_y u=o\,,\quad D_z u=o\,,\ \ldots$$

I valori delle x, y, z . . . che si deducono dalla risoluzione di queste n equazioni fra n incognite, e che verificano una delle condizioni di già indicate saranno quei che rendono massima, o minima la funzione. Quando fosse discontinua la funzione, allora la condizione del massimo, e del minimo dovrà ricercarsi nelle radici dell'equazione

$$du = \infty$$

In fine se la $F'(\alpha)$ nella vicinanza dei valori $\alpha = o$ resta costantemente positiva o negativa, la funzione in proposito non somministrerà nè massimo nè minimo.

91.° Per mostrare una qualche applicazione sia

$$u = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + A'x + B'y + C'$$

ed avremo dalla differenziazione

$$dx = (2Ax + By + A')\,dx + (Bx + 2Cy + B')\,dy$$

quindi per la condizione del massimo, o del minimo

$$2Ax + By + A' = o, \quad Bx + 2Cy + B' = o$$

d'onde i valori particolari

$$x = \frac{2CA' - BB'}{B^2 - 4AC}, \quad y = \frac{2AB' - BA'}{B^2 - 4AC}$$

Formando adesso la differenza $F(\alpha) - F(o)$ con i trovati valori delle x, y, si vedrà che esiste un massimo per

$$B^2 - 4AC < o \qquad \text{ed} \qquad A < o$$

ed un minimo nel caso di

$$B^2 - 4AC < o, \quad \text{ed} \quad A > o$$

Sia ancora

$$u = xy\,(3q - x - y)$$

abbiamo dalle condizioni del massimo, o del minimo

$$D_x u = y\,(3a - 2x - y) = 0$$

$$D_y u = x\,(3a - x - 2y) = 0$$

d'onde

$$x = a\,, \quad y = a$$

Sostituendo ora nella u invece delle x, y le quantità $a + \alpha dx$, $a + \alpha dy$, e formando la differenza $F(\alpha) - F(o)$, sarà

$$(a + \alpha dx)\,(a + \alpha dy)\,(3a - a - \alpha dx - a - \alpha dy)$$

$$- a^2\,(3a - a - a)$$

$$= - a\,\alpha^2(\,(dx + dy)^2 - dx\,dy\,) - \alpha^3\,dx\,dy\,(dx + dy)$$

Ora questa differenza nella vicinanza del valore $\alpha = o$ si mantiene positiva per $a < o$, e negativa per $a > o$, dunque i valori

$$x = a \qquad y = a$$

somministrano un massimo nel secondo caso ed un minimo nel primo.

92.° Le condizioni del massimo, e del minimo si possono desumere anche dalle funzioni derivate degli ordini superiori: rammentandoci infatti che la formola

$$F(\alpha) = f(\,x + \alpha\,dx\,,\; y + \alpha\,dy\,,\; z + \alpha\,dz\,,\; \ldots)$$

ci somministra

$$F(o) = u\,,\; F'(o) = du\,,\; F''(o) = d^2u\,,\; \ldots\, F^{(n)}(o) = d^n u$$

diremo che allora u è un massimo od un minimo, quando per un certo sistema di valori delle x, y, z . . . . verificandosi

$$F'(o) = du = o$$

si ha inoltre

$$F^{(2n)}(o) = d^{2n} u < o \qquad \text{per il massimo}$$

e

$$F^{(2n)}(o) = d^{2n} u > o \qquad \text{per il minimo.}$$

D'altronde il differenziale dell'ordine $2n$ si potrà esprimere simbolicamente per

$$d^{2n}u = (dx\, D_x + dy\, D_y + dz\, D_z + \ldots)^{2n} u$$

purchè dopo lo sviluppo, l' esponente indichi ordini di derivazioni nelle caratteristiche D_x, D_y, $D_z \ldots$, e potenza nei differenziali dx, dy, $dz \ldots$: il segno di $d^{2n}u$ dipenderà dal segno del secondo membro, il quale sarà un polinomio omogeneo del grado $2n$ riguardo ai differenziali dx, dy, dz .... cosicchè chiamando d'ora innanzi $x, y, z \ldots t$ le variabili, e formando i rapporti

$$\frac{dx}{dt} = p\,; \quad \frac{dy}{dt} = q\,, \quad \frac{dz}{dt} = r\,, \ldots$$

il segno di $d^{2n}u$ dipenderà dal segno del polinomio

$$(p\, D_x + q\, D_y + r\, D_z \ldots + D_t)^{2n} u$$

quale dovrà rimanere o costantemente positivo, o negativo, comunque varino dx, dy, $dz \ldots dt$. Ora questo polinomio rimane invariabile, quante volte posto

$$(p\, D_x + q\, D_y + r\, D_z + \ldots + D_t)^{2n} u = o$$

le radici relative a p o sieno tutte immaginarie, se ve ne sono delle reali, queste sieno eguali, od in un numero pari, e sarà facile il concludere che il segno di $d^{2n}u$ coinciderà con il segno di $D_x^{2n}u$ comunque varino i rapporti p, q, r, ...

93.° Così per una funzione di due variabili

$$u = f(x, y)$$

e per il differenziale secondo sarà

$$d^2u = D_x^2u\, dx^2 + D_y^2u\, dy^2 + 2D_x\, D_yu\, dx\, dy$$

Quante volte il sistema dei valori di x, y dedotti dalle due condizioni

$$D_xu = 0\,, \qquad D_yu = 0$$

non annulli d^2u, allora il suo segno sarà lo stesso che il segno del trinomio

$$p^2\, D_x^2u + D_y^2u + 2p\, D_x\, D_yu$$

ove

$$p = \frac{dy}{dx}$$

Ponendo adunque

$$p^2\, D_x^2u + 2p\, D_x\, D_yu + D_y^2u = 0$$

le radici di quest'equazione saranno immaginarie, se sia

$$D_x^2u\, D_y^2u - (D_x\, D_yu)^2 > 0$$

saranno reali ed eguali se

$$D_x^2u\, D_y^2u - (D_x\, D_yu)^2 = 0$$

e perciò sotto queste condizioni si verificherà costantemente $d^2u < 0$ se $D_x^2u < 0$ e $d^2u > 0$ se $D_x^2u > 0$, comunque d'altronde varino i differenziali dx, dy.

Per la funzione di tre variabili

$$u = f(x, y, z)$$

abbiamo dal differenziale secondo

$$d^2u = D_x^2u\,dx^2 + D_y^2u\,dy^2 + D_z^2u\,dz^2 + 2D_x\,D_yu\,dx\,dy$$
$$+ 2D_x\,D_zu\,dx\,dz + 2D_y\,D_zu\,dy\,dz$$

e supponendo che rimanga di valor finito per la sostituzione dei valori delle x, y, z che verificano le condizioni

$$D_xu = 0\,,\qquad D_yu = 0\,,\qquad D_zu = 0$$

e fatto per brevità

$$\frac{dx}{dz} = p\,,\quad \frac{dy}{dz} = q$$

ne verrà che il segno di d^2u rimarrà invariabile, quante volte l'equazione di secondo grado

$$p^2\,D_x^2u + 2\,(qD_x\,D_yu + D_x\,D_zu)\,p$$
$$+ q^2\,D_y^2u + 2q\,D_y\,D_zu + D_z^2u = 0$$

risoluta rapporto a p non ammetta radici reali, o per conseguenza qualunque sia q dovrà verificarsi

$$\left(D_x^2u\,D_y^2u - (D_x\,D_yu)^2\right)q^2 + 2\left(D_x^2u\,D_yD_zu - D_xD_yu\,D_x\,D_zu\right)q$$
$$+ D_x^2u\,D_z^2u - (D_x\,D_zu)^2 > 0$$

A questa condizione si soddisfa quando sia

$$D_x^2u\,D_y^2u - (D_x\,D_yu)^2 > 0$$

ed insieme

$$\left(D_x^2u\,D_y^2u - (D_x\,D_yu)^2\right)\left(D_x^2u\,D_z^2u - (D_x\,D_zu)^2\right)$$
$$- (D_x^2u\,D_y\,D_zu - D_x\,D_yu\,D_x\,D_zu)^2 > 0$$

Nella stessa guisa si potrebbe procedere con un numero

maggiore di variabili. Prima di venire a speciali applicazioni osserveremo che alcune volte oltre della funzione fra n variabili x, y, z .... sussistono per tutto il corso della medesima delle relazioni generiche

$$\varphi(x, y, z \ldots) = 0 \quad \psi(x, y, z \ldots) = 0 \quad \chi(x, y, z \ldots) = 0$$

Se queste sieno m di numero, allora le variabili indipendenti diminuiranno di numero, e si ridurranno ad $n - m$: queste riflessioni saranno sufficienti per farci risolvere alcuni interessanti problemi, che si presentano in geometria, ed in Meccanica.

94.° Vogliasi per esempio il massimo e minimo valore della funzione

$$u = ax + by + cz$$

quando fra x, y, z sussista la relazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Avremo dalla differenziazione della u

$$du = a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

quindi per il massimo, e per il minimo sarà non solamente

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$$

ma ben anche

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

dalle quali si ricaverà

$$\frac{x}{z} = \frac{a}{c}, \quad \frac{y}{z} = \frac{b}{c}$$

ovvero

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

d'onde

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

$$z = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Sostituendo questi valori nelle u, otteniamo per i due segni

$$u = \sqrt{a^2+b^2+c^2}, \quad u = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Il primo rappresenta il massimo valore ed il secondo il minimo. Per sperimentare i criteri riportati nell' antecedente parag., si elimini il dz fra il valore di du e l'equazione differenziale data, sarà

$$du = \left(a - \frac{cx}{z}\right) dx + \left(b - \frac{cy}{z}\right) dy$$

ed insieme

$$dz = -\frac{xdy + ydy}{z}$$

Proseguendo la differenziazione nella prima espressione di du, abbiamo per l'ipotesi di dx, dy costanti

$$d^2u = cd^2z$$

e nello stesso tempo

$$d^2z = -\frac{dx^2 + dy^2}{z} - \frac{(xdx + ydy)^2}{z^3}$$

e perciò

$$d^2u = -c\frac{dx^2 + dy^2}{z} - c\frac{(xdx + ydy)^2}{z^3}$$

ove i coefficienti di dx^2, dy^2, $dx\,dy$ saranno le derivate

successive parziali della u, vale a dire

$$D_x^2 u = -c\left(\frac{1}{z}+\frac{x^2}{z^3}\right), \quad D_y^2 u = -c\left(\frac{1}{z}+\frac{y^2}{z^3}\right)$$

$$D_x D_y u = -\frac{c\,x\,y}{z^3}$$

e sostituendosi i trovati valori di x, y, z si ottiene

$$D_x^2 u = \mp\left(\frac{a^2+c^2}{c^2}\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$D_y^2 u = \mp\left(\frac{b^2+c^2}{c^2}\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$D_x D_y u = \pm\frac{ab}{c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Queste tre derivate verificano la condizione di già stabilita nell'antecedente parag. cioè

$$D_x^2 u D_y^2 u - (D_x D_y u)^2 = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{c}\right)^2 > 0$$

ed avendosi $D_x^2 u < 0$ per i valori positivi di x, y, z, e $D_x^2 u > 0$ per i valori negativi, resterà dimostrato che dei due valori di u, il primo è un massimo ed il secondo un minimo. Le precedenti equazioni risolvono in meccanica il problema sulla massima somma delle proiezioni delle aree sopra un piano di determinata posizione.

95.° Cerchiamo inoltre il massimo, o minimo valore della funzione r determinata dalla formola

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\varepsilon$$

con la condizione che fra x, y sussista l'equazion di secondo grado

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey = K$$

Ognun vede che riportata la questione in geometria, si riduce alla determinazione degli assi principali di una linea di secondo ordine dotata di centro, del quale le coordinate rettilinee congiunte ad angolo ε supporremo essere α, β. Per la condizione del massimo, e minimo, si avrà dalla differenziazione di r^2

$$dr = \frac{(x-\alpha + (y-\beta)\cos\varepsilon)\,dx + (y-\beta + (x-\alpha)\cos\varepsilon)\,dy}{r} = o$$

e dalla differenziazione dell'equazione

$$(Ax + Cy + D)\,dx + (By + Cx + E)\,dy = o.$$

Non potendo la r divenir infinita, avrà luogo la coesistenza delle due equazioni

$$(x-\alpha + (y-B)\cos\varepsilon)\,dx + (y-\beta + (x-\alpha)\cos\varepsilon)\,dy = o$$

$$(Ax + Cy + D)\,dx + (By + Cx + E)\,dy = o$$

ove eliminando il rapporto dei differenziali, si ricaverà la frazione simmetrica

$$\frac{Ax + Cy + D}{x - \alpha + (y - \beta)\cos\varepsilon} = \frac{By + Cx + E}{y - \beta + (x - \alpha)\cos\varepsilon}$$

Per dedurre un valor commune indipendente dalle variabili x, y, basterà moltiplicare, e dividere la prima per $x - \alpha$, e la seconda per $y - \beta$, e quindi fare la somma dei numeratori, e la somma dei denominatori, e

si otterrà in forza del valore di r^2, e dell' equazione data di secondo grado

$$\frac{Ax + Cy + D}{x - \alpha + (y - \beta)\cos\varepsilon} = \frac{By + Cx + E}{y - \beta + (x - \alpha)\cos\varepsilon}$$

$$= \frac{K - (A\alpha + C\beta + D)\,x - (B\beta + C\alpha + E)\,y - (D\alpha + E\beta)}{r^2}$$

Quando il punto α, β appartiene al centro si verifica

$$A\alpha + C\beta + D = 0\,, \qquad B\beta + C\alpha + E = 0$$

d'onde

$$\alpha = \frac{BD - CE}{C^2 - AB}\,, \quad \beta = \frac{AE - CD}{C^2 - AB}$$

e perciò fatto per brevità

$$S = K - (D\alpha + E\beta)$$

ovvero

$$S = K - \frac{(AE^2 + BD^2 - 2CDE)}{C^2 - AB}$$

otterremo le frazioni simmetriche

$$\frac{Ax + Cy + D}{x - \alpha + (y - \beta)\cos\varepsilon} = \frac{By + C + E}{y - \beta + (x - \alpha)\cos\varepsilon} = \frac{S}{r^2}$$

Sostituendo infine i valori di D, ed E in funzione di α, e β, e ponendo

$$p = \frac{S}{r^2}$$

dedurremo le due equazioni separate

$$(A - p)(x - \alpha) + (C - p\cos\varepsilon)(y - \beta) = 0$$

$$(B - p)(y - \beta) + (C - p\cos\varepsilon)(x - \alpha) = 0$$

L'eliminazione dei fattori $x-\alpha$, $y-\beta$ produrrà l'equazion risultante

$$(A-p)(B-p)-(C-p\cos\varepsilon)^2=o$$

ed eseguendo i sviluppi, si trova

$$p^2\,\text{sen}^2\varepsilon-(A+B-2C\cos\varepsilon)p+AB-C^2=o$$

Senza fermarci a dimostrare la realtà delle radici di quest'equazione, diremo che dalla medesima si ricavano i massimi e minimi valori reali di r^2 sotto le due condizioni di

$$AB-C^2>o\,,\qquad\text{od}\qquad AB-C^2<o.$$

La sostituzione di p, porgerà l'equazione

$$r^4-(A+B-2C\cos\varepsilon)\frac{S}{AB-C^2}r^2+\frac{S^2}{AB-C^2}\text{sen}^2\varepsilon=o$$

dalla quale è assai facile di trovare le note relazioni che passano fra gli assi principali, ed i sistemi di assi obliqui diametrali. Nelle applicazioni del calcolo infinitesimale alla geometria, risolveremo una simile questione per gli assi principali di una superficie del second' ordine.

Sviluppo delle funzioni in serie per mezzo dei Teoremi di Mac-Laurin e Taylor estesi a più variabili indipendenti.

96.° Una funzione continua, ed esplicita delle variabili x, y, z, . . . si svilupperà in serie convergente secondo le potenze ascendenti di x, y, z . . . ove ciascun termine sia una funzione intera, ed omogenea delle

x, y, z . . . se alla funzione proposta $f(x, y, z\dots)$ si sostituisca $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z \dots)$ e si sviluppi la nuova funzione per le potenze di α, e si faccia in seguito $\alpha=1$. Per mezzo di quest' artificio lo sviluppo delle funzioni esplicite di più variabili si ridurrà allo sviluppo delle funzioni esplicite di una sola variabile. Pongasi adunque

$$F(\alpha)=f(\alpha x, \alpha y, \alpha z\dots)$$

si avrà per il Teorema di Mac-Laurin

$$F(\alpha)=F(o)+\frac{\alpha}{1}F'(o)+\frac{\alpha^2}{1.2}F''(o)+\frac{\alpha^3}{1.2.3}F'''(o)+\dots$$

Per ottenere una derivata qualunque m^{esima} da $F(\alpha)$, basterà richiamare una delle formole generali date alla fine del parag. 79, e si dedurrà con facilità l' espressione simbolica

$$F^{(m)}(\alpha)=[f'_x(\alpha x, \alpha y, \alpha z\dots)x+f'_y(\alpha x, \alpha y, \alpha z\dots)y$$
$$+f'_z(\alpha x, \alpha y, \alpha z\dots)+\dots]^m$$

Nello sviluppo delle potenze si devono sostituire altrettanti ordini di derivazione per le caratteristiche f'_x, f'_y, f'_z . . . , così per esempio, supponendo due le variabili indipendenti e nello stesso tempo $m=2$, si avrà

$$F''(\alpha)=[f'_x(\alpha x, \alpha y)x+f'_y(\alpha x, \alpha y)y]^2$$

ovvero

$$F''(\alpha)=f''_x(\alpha x, \alpha y)x^2+f''_y(\alpha x, \alpha y)y^2$$
$$+2f''_{x,y}(\alpha x, \alpha y)xy$$

Facciasi adesso $\alpha=o$ nella $F^{(m)}(\alpha)$, ricaveremo

$$F^{(m)}(o)=[f'_x(o, o, o\dots)x+f'_y(o, o, o\dots)y+f'_z(o, o, o\dots)z+]^m$$

Con questi valori otterremo dopo la sostituzione

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z \ldots) = f(0, 0, 0 \ldots)$$

$$+ \frac{\alpha}{1}\Big(f'_x(0, 0, 0 ..)\, x + f'_y(0, 0, 0 ..)\, y + f'_z(0, 0, 0 ..) z + ..\Big)$$

$$+ \frac{\alpha^2}{1 . 2}\Big(f'_x(0, 0, 0 ..)\, x + f'_y(0, 0, 0 ..)\, y + f'_z(0, 0, 0 ..) z + ..\Big)^2$$

$$+ \ldots\ldots$$

Infine l'ipotesi di $\alpha = 1$, darà

$$f(x, y, z \ldots) = f(0, 0, 0 \ldots)$$

$$+ f'_x(0, 0, 0 ..)\, x + f'_y(0, 0, 0 ..)\, y + f'_z(0, 0, 0 ..)\, z + ..$$

$$+ \frac{1}{1 . 2}\Big(f'_x(0, 0, 0 ..)\, x + f'_y(0, 0, 0 ..)\, y + f'_z(0, 0, 0 ..) z + ..\Big)^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Ora è evidente che le funzioni

$$f'_x(0, 0, 0 \ldots),\quad f'_y(0, 0, 0 \ldots),\quad f'_z(0, 0, 0 \ldots) \ldots\ldots,$$

coincidono con

$$D_x u,\quad D_y u,\quad D_z u, \ldots .$$

Facendo dopo la derivazione $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ... se dunque si chiami u_0 ciò che diviene la funzione u per questa sostituzione, avremo per il suo sviluppo l'espressione simbolica

$$u = u_0 + (x\, D_x + y\, Dy + z\, D_z + \ldots) u_0$$

$$+ \frac{1}{1 . 2}(x\, D_x + y\, D_y + z\, D_z + \ldots)^2 u_0$$

$$+ \frac{1}{1 . 2 . 3}(x\, D_x + y\, D_y + z\, D_z + \ldots)^3 u_0$$

$$+ \ldots\ldots$$

Tal'è effettivamente il Teorema di Mac-Laurin esteso a più variabili indipendenti : la serie poi dell'esponenziale a base iperbolica ci porge per la funzione

$$u = f(x,\ y,\ z\ \dots)$$

la nuova espressione simbolica della formola di Mac-Laurin a più variabili

$$u = e^{x\,D_x + y\,D_y + z\,D_z}\,u_0$$

97.° Volendo tener conto del resto della serie dopo il termine n^{esimo}, ed avremo per $\theta > 0$, $e < 1$

$$F^{(n)}(\theta\alpha) = [f'_x(\theta\alpha x,\ \theta\alpha y,\ \theta\alpha z \dots)$$
$$+ f'_y(\theta\alpha x,\ \theta\alpha y,\ \theta\alpha z \dots) + f'_z(\theta\alpha x,\ \theta\alpha y,\ \theta\alpha z \dots) +]^n$$

d'onde per $\alpha = 1$

$$F^{(n)}(\theta) = [f'_x(\theta x, \theta y, \theta z \dots) + f'_y(\theta x, \theta y, \theta z \dots)$$
$$+ f'_z(\theta x, \theta y, \theta z \dots)]^n$$

Dividendo il primo e secondo membro per $1.2.3 \dots n$, e supposto

$$r_n = \frac{F^{(n)}(\theta)}{1\,.\,2\,.\,3 \dots n}$$

sarà questo il dimandato resto. Così per due variabili si trova

$$f(x, y) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)\,x + f'_y(0, 0)\,y$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2}[f'_x(0, 0)\,x + f'_y(0, 0)\,y\,]^2$$
$$+ \ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+ \frac{1}{1.\,2.\,3 \dots n-1}(f'_x(0, 0)\,x + f'_y(0, 0)\,y\,)^{n-1}$$
$$+ \frac{1}{1.\,2.\,3 \dots n}[f'_x(\theta x, \theta y)\,x + f'_y(\theta x, \theta y)\,y\,]^n$$

Se per valori infinitamente grandi della n converga il resto verso lo zero, allora $f(x, y)$ si sviluppa in serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti delle x, y. Per formarci un idea precisa del modo di usare di queste differenti formole supponiamo che si voglia arrestare la serie dopo i termini che contengono le funzioni prime derivate; si dovrà prendere $n = 2$, e per conseguenza

$$f(x, y) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)\, x + f'_y(0, 0)\, y$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f'_x(\theta x, \theta y)\, x + f'_y(\theta x, \theta y)\, y\right)^2$$

Pongasi

$$u = f(x, y), \quad u_0 = f(0, 0)$$
$$D_x u = f'_x(x, y), \quad D_y u = f'_y(x, y)$$

e insieme

$$U = f(\theta x, \theta y)$$

d'onde

$$D_x U = f'_x(\theta x, \theta y)\, \theta, \quad D_y U = f'_y(\theta x, \theta y)\, \theta$$
$$D_x^2 U = f''_x(\theta x, \theta y)\, \theta^2, \quad D_y^2 U = f''_y(\theta x, \theta y)\, \theta^2$$
$$D_x D_y U = f''_{x,y}(\theta x, \theta y)\, \theta^2$$

Eseguendo la derivazione riguardo a θ si trova

$$D_\theta U = f'_x(\theta x, \theta y)\, x + f'_y(\theta x, \theta y)\, y$$
$$D_\theta^2 U = f''_x(\theta x, \theta y)\, x^2 + f''_y(\theta x, \theta y)\, y^2$$
$$+ 2 f''_{x,y}(\theta x, \theta y)\, xy$$

Con queste differenti sostituzioni si ricaverà

$$u = u_0 + x\, D_x u_0 + y\, D_y u_0$$
$$+ \frac{1}{2}\, \frac{x^2 D_x^2 U + y^2 D_y^2 U + 2xy\, D_x D_y U}{\theta^2}$$

ovvero

$$u = u_0 + x\, D_x u_0 + y\, D_y u_0 + \frac{1}{2}\, D_\theta^2 U$$

Operazioni simili si presentano, volendo arrestare la serie a derivate di ordine superiore al primo.

98.° Il Teorema di Taylor si estenderà a più variabili indipendenti con i medesimi artifici usati per quello di Mac-Laurin: rappresentati infatti per $h, k, l, \ldots$ gli incrementi delle variabili $x, y, z \ldots$ basterà sostituire alla funzione

$$f(x+h\,,\; y+k\,,\; z+l\,,\; \ldots)$$

la

$$f(x+\alpha h\,,\; y+\alpha k\,,\; z+\alpha l\,,\; \ldots)$$

e considerare questa come funzione della α, e porre dopo lo sviluppo $\alpha = 1$: contuttociò noi ci giungeremo partendo dal Teorema stesso di Mac-Laurin. Supposte per brevità due le variabili, ed h, k i loro incrementi, si sostituisca nella formola di Mac-Laurin h, k invece di x, y, ed il simbolo f in f, avremo

$$\mathrm{f}(h, k) = \mathrm{f}(0, 0) + \mathrm{f}'_h(0, 0)\, h + \mathrm{f}_k(0, 0)\, k$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2}\, [\, \mathrm{f}'_h(0, 0)\, h + \mathrm{f}'_k(0, 0)\, k\,]^2 + \ldots .$$

Pongasi ora

$$\mathrm{f}(h, k) = f(x+h\,,\; y+k)$$

sarà evidentemente

$$\mathrm{f}(0, 0) = f(x, y)\,,\quad \mathrm{f}'_h(0, 0) = f'_x(x, y)\,,\ \ldots$$

$$\mathrm{f}'_k(0, 0) = f'_y(x, y)\,,\ \ldots .$$

d'onde la formola simbolica

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,y)+f'_x(x,y)\,h+f'_y(x,y)\,k$$
$$+\frac{1}{1\,.\,2}\left(f'_x(x,y)\,h+f'_y(x,y)\,k\right)^2$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .$$

Se dunque pongasi generalmente

$$u=f(x,\ y,\ z\ ...)$$

per cui

$$\Delta u=f(x+h,\ y+k,\ z+l\ ...)-f(x,y)$$

$$D_x u=f'_x(x,y,z\ ...)\ ,\quad D_y u=f'_y(x,y,z\ ...)$$

$$D_z u=f'_z(x,y,z\ .\ .)$$

ricaveremo la formola simbolica

$$\Delta u=(h\,D_x+k\,D_y+l\,D_z\ .\ .\ .)\,u$$
$$+\frac{1}{1\,.\,2}(hD_x+kD_y+lD_z\ ...)^2+\frac{1}{1.2.3}(hD_x+kD_y+lD_z\ ...)^3$$
$$+\ .\ .\ .\ .$$

Ed in questa consiste il Teorema di Taylor a più variabili indipendenti: la serie dell'esponenziale permette anche di rappresentarlo più brevemente per

$$\Delta u=\left(e^{hD_x+kD_y+lD_z+\ ....}-1\right)u$$

Nel caso particolare di

$$h=dx\ ,\quad k=dy\ ,\quad l=dz\ ,\ .\ .\ .\ .$$

la serie per la nuova espressione di

$$d^n u=(dx\,D_x+dy\,D_y+dz\,D_z+\ .\ .\ .\ )^n u$$

si trasformerà in

$$f(x+dx,\, y+dy\,,\, z+dz\,,\, \ldots) - f(x, y, z \ldots)$$

$$= \Delta u = du + \frac{1}{1\,.\,2}\, d^2u + \frac{1}{1.2.3}\, d^3u + \ldots$$

Volendo calcolare il resto della serie dopo i termini che contengono le derivate dell'ordine $n-1$, converrebbe dopo questi aggiungerci la quantità simbolica

$$r_n = \frac{1}{1.\,2.\,3 \ldots n}\left(f'_x(x+\theta h,\, y+\theta k)\, h + f'_y\,(x+\theta h,\, y+\theta k)\, k\right)^n$$

ove secondo il consueto $\theta > o$, e < 1. Se per valori particolari a, b delle variabili x, y si verificasse

$$D_x u = o\,,\; D_y u = o\,,\; D_x^2 u = o,\; D_y^2 u = o,\; D_x\, D_y u = o$$

. . . . . .

fino alle derivate dell' ordine $n-1$ allora deduciamo evidentemente

$$f(a+h\,,\, b+k) - f(a, b)$$

$$= \frac{1}{1.\,2.\,3 \ldots n}\left(f'_x\,(a+\theta h,\, b+\theta k)\, h + f'_y\,(a+\theta h,\, b+\theta k)\, k\right)^n$$

Questa formola analoga ad una che già abbiamo dimostrato per una sola variabile alla fine del parag. 49 può indicarci fra gli altri usi un criterio per riconoscere se una data funzione di più variabili ammetta un *massimo*, od un *minimo* per i valori particolari a, b delle indipendenti x, y, aggiungiamo che le precedenti formole sussistono qualunque sia il numero delle medesime variabili indipendenti.

Sullo sviluppo delle funzioni implicite in serie convergente, ed in particolare della serie di Lagrange.

99.° Lo sviluppo di una variabile y considerata come funzione della x, quando non sia data che la sola relazione, od equazione

$$f(x, y) = 0$$

si ridurrà alla ricerca di una radice y della medesima equazione, e che venga espressa da nna serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti della x. Non potendo noi trattenerci nelle delicate discussioni, che riguardano la convergenza delle serie, le quali provengano dallo sviluppo delle funzioni implicite, ci basterà notare che per mezzo dei Teoremi di Mac-Lanrin, e Taylor potremo in generale sviluppare la più piccola radice y in serie ordinata secondo le potenze ascendenti della x, quale dovrà essere compresa fra determinati limiti, onde la serie riesca convergente. Fra i diversi metodi immaginati dai geometri per costruire lo sviluppo delle funzioni implicite noi faremo uso di quello che il sig. Cauchy espone nell' adunanza dell'accademia delle scienze del 26 ottobre 1840. Secondo questo metodo noi verremo a determinare in generale la più piccola radice non ripetuta dell'eqnazione $f(x, y) = 0$, e che si ridurrà ad un valore particolare α per $x = 0$, od in altri termini si otterrà il valore della differenza $y - \alpha$ secondo le potenze ascendenti della x, od anche una potenza qualunque intera di questa differenza; infine si ricaverà una formola data da Lagrange con altre del medesimo genere.

100.° Indicando per y una radice dell'equazione

$$f(y, x) = 0$$

corrispondente ad un dato valore della x e per α una radice della medesima equazione per $x = 0$, avremo anche

$$f(\alpha, 0) = 0$$

Ciò posto prendendo per u una variabile ausiliare, le due equazioni

$$f(u, x) = 0, \quad f(u, 0) = 0$$

ammetteranno la prima una radice $u = y$, e la seconda una radice $u = \alpha$, quindi nell'ipotesi che le due radici y, α non sieno ripetute, e che la prima si riduca alla seconda per $x = 0$, potremo dividere le due ultime equazioni per le differenze $u - y$, $u - \alpha$ in modo da avere

$$f(u, x) = (u - y)\, \varphi(u, x)$$

$$f(u, 0) = (u - \alpha)\, \varphi(u, 0)$$

ove $\varphi(u, 0)$ non potrà divenir nè nulla nè infinita per $u = \alpha$, altrimenti α non sarebbe radice semplice dell' equazione, nè la funzione continua.

Pongasi

$$u = \alpha + \varepsilon$$

le due ultime formole diverranno

$$f(\alpha + \varepsilon, x) = (\alpha - y + \varepsilon)\, \varphi(\alpha + \varepsilon, x)$$

$$f(\alpha + \varepsilon, 0) = \varepsilon\, \varphi(\alpha + \varepsilon, 0)$$

e dividendo la prima per la seconda

$$\frac{f(\alpha + \varepsilon, x)}{f(\alpha + \varepsilon, 0)} = \frac{\alpha - y + \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varphi(\alpha + \varepsilon, x)}{\varphi(\alpha + \varepsilon, 0)}$$

Prendendo i logaritmi Neperiani, ed eseguendo una

derivazione riguardo ad ε, avremo

$$D_\varepsilon \log \frac{f(\alpha+\varepsilon, x)}{f(\alpha+\varepsilon, o)} = \frac{1}{\alpha-y+\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} + D_\varepsilon \log \frac{\varphi(\alpha+\varepsilon, x)}{\varphi(\alpha+\varepsilon, o)}$$

dalla quale si deduce

$$D_\varepsilon \log \frac{\varphi(\alpha+\varepsilon, x)}{\varphi(\alpha+\varepsilon, o)} = D_\varepsilon \log \frac{f(\alpha+\varepsilon, x)}{f(\alpha+\varepsilon, o)} - \frac{1}{\alpha-y+\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}$$

Come già abbiamo avvertito non potendo $f(u, o)$ divenir per ipotesi, nè nulla nè infinita per $u=\alpha$, ne siegue che la funzione $\varphi(\alpha+\varepsilon, x)$ non diverrà, nè infinitesima, nè infinita per valori piccolissimi ed infinitesimi di ε ed x, e per conseguenza sotto gl'indicati valori la funzione, e la sua derivata logaritmica

$$D_\varepsilon \log \frac{\varphi(\alpha+\varepsilon, x)}{\varphi(\alpha+\varepsilon, o)}$$

saranno sviluppabili in serie ordinate secondo le potenze ascendenti della ε, e della x, e lo stesso si dovrà dire del secondo membro dell'ultima equazione rappresentata dalla riferita derivata logaritmica; ma per essere in stato di poter eseguire questo sviluppo converrà primieramente trasformare il rapporto

$$\frac{1}{\alpha-y+\varepsilon}$$

in serie ordinata secondo le potenze ascendenti della differenza $y-\alpha$, purchè delle due quantità infinitesime $y-\alpha$, ed ε, reali od immaginarie il modulo della prima conservi un valore inferiore al modulo di ε, qual cosa si potrà sempre ottenere ed avremo sotto quest'ipotesi

$$\frac{1}{\alpha-y+\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{y-\alpha}{\varepsilon^2} + \frac{(y-\alpha)^2}{\varepsilon^3} + \frac{(y-\alpha)^3}{\varepsilon^4} + \dots$$

Ora per quanto è stato già osservato, otteniamo non solo

$$\log\frac{f(\alpha+\varepsilon,x)}{f(\alpha+\varepsilon,o)}=K_1\,x+K_2\,x^2+K_3\,x^3+\ldots\ldots$$

ma ben anche

$$D_\varepsilon\log\frac{f(\alpha+\varepsilon,x)}{f(\alpha+\varepsilon,o)}=H_1\,x+H_2\,x^2+H_3\,x^3+\ldots\ldots$$

ove per il Teorema di Mac-Laurin

$$K_{(n)}=\frac{1}{1.\,2.\,3\,\ldots\,n}\,D_x^n\log\frac{f(\alpha+\varepsilon,x)}{f(\alpha+\varepsilon,o)}$$

$$H_{(n)}=\frac{1}{1.\,2.\,3\,\ldots\,n}\,D_x^n\,D_\varepsilon\log\frac{f(\alpha+\varepsilon,x)}{f(\alpha+\varepsilon,o)}$$

con la condizione di fare dopo le derivazioni $x=o$, e fra i coefficienti $K_{(n)}$, $H_{(n)}$ sussiste generalmente

$$H_{(n)}=D_\varepsilon\,K_{(n)}$$

quindi da queste sostituzioni

$$D_\varepsilon\log\frac{\varphi(\alpha+\varepsilon,x)}{\varphi(\alpha+\varepsilon,o)}=H_1\,x+H_2\,x^2+H_3\,x^3+\ldots\ldots$$

$$-\frac{(y-\alpha)}{\varepsilon\;\varepsilon^2}-\frac{(y-\alpha)^2}{\varepsilon^3}-\frac{(y-\alpha)^3}{\varepsilon^4}\ldots\ldots$$

Onde il primo membro sia sviluppabile in serie convergente ordinata secondo le potenze di x, ed ε, converrà che i coefficienti H_1, H_2, H_3, ... indipendenti da x si sviluppino in serie secondo le potenze della ε sia positiva che negativa : il secondo membro della penultima

equazione non potendo contenere potenze negative di x, ed ε, ne siegue che il coefficiente di $\frac{1}{\varepsilon^2}$ nel polinomio $H_1 x + H_2 x^2 + H_3 x^3 + \ldots\ldots$ uguaglierà $y - \alpha$, e così il coefficiente di $\frac{1}{\varepsilon^3}$ sarà eguale nel $(y - \alpha)^2$, ... e per conseguenza i sviluppi di H_1, H_2, H_3 . . . non potranno essere che della forma

$$H_1 = \frac{M}{\varepsilon^2} + \frac{M'}{\varepsilon} + M'' + M''' \varepsilon + \ldots\ldots$$

$$H_2 = \frac{N}{\varepsilon^3} + \frac{N'}{\varepsilon^2} + \frac{N''}{\varepsilon} + N''' + N^{IV} \varepsilon + \ldots$$

$$H_3 = \frac{P}{\varepsilon^4} + \frac{P'}{\varepsilon^3} + \frac{P''}{\varepsilon^2} + \frac{P'''}{\varepsilon} + P^{IV} + P^{V} \varepsilon + \ldots$$

dalle quali ricaviamo assai facilmente

$$y - \alpha = M x + N' x^2 + P'' x^3 + \ldots$$

$$(y - \alpha)^2 = N x^2 + P' x^3 + \ldots$$

$$(y - \alpha)^3 = P x^3 + \ldots$$

. . . .

Sarà facile cosa di conoscere i valori dei coefficienti M, N', P'', N, P', P .... ed infatti dalle H_1, H_2, H_3... ricaviamo

$$\varepsilon^2 H_1 = M + M' \varepsilon + \ldots$$

$$\varepsilon^3 H_2 = N + \varepsilon N' + \varepsilon^2 N'' + \ldots$$

$$\varepsilon^4 H_3 = P + \varepsilon P' + \varepsilon^2 P'' + \varepsilon^3 P''' + \ldots$$

Eseguendo nelle due ultime delle successive derivazioni riguardo ad ε troviamo

$$D_\varepsilon(\varepsilon^3 H_2) = N' + 2\varepsilon N'' + \ldots$$

$$D_\varepsilon(\varepsilon^4 H_3) = P' + 2\varepsilon P'' + 3\varepsilon^2 P''' + \ldots$$

$$D_\varepsilon^2(\varepsilon^4 H_3) = 2P'' + 2.\,3\,\varepsilon P''' + \ldots$$

quindi fatto da per tutto $\varepsilon = o$, sarà

$M = \varepsilon^2 H_1, \quad N = \varepsilon^3 H_2, \quad P = \varepsilon^4 H_3$

$N' = D_\varepsilon(\varepsilon^3 H_3), \quad P' = D_\varepsilon(\varepsilon^4 H_3), \quad P'' = \frac{1}{1\,.\,2} D_\varepsilon^2(\varepsilon^4 H_3)$

. . . . . .

dunque

$$y - \alpha = x(\varepsilon^2 H_1) + \frac{x^2}{1} D_\varepsilon(\varepsilon^3 H_2) + \frac{x^3}{1\,.\,2} D_\varepsilon^2(\varepsilon^4 H_3) + \ldots$$

$$(y-\alpha)^2 = x^2(\varepsilon^3 H_2) + \frac{x^3}{1} D_\varepsilon(\varepsilon^4 H_3) + \frac{x^4}{1\,.\,2} D_\varepsilon^2(\varepsilon^5 H_4) + \ldots$$

$$(y-\alpha)^3 = x^3(\varepsilon^4 H_3) + \frac{x^4}{1} D_\varepsilon(\varepsilon^5 H_4) + \ldots$$

. . . . . .

101.° Se per maggior semplicità si ponga

$$y - \alpha = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{(n)} x^n + \ldots$$

è evidente che un coefficiente qualunque $A_{(n)}$ sarà espresso dalla formola

$$A_{(n)} = \frac{1}{1.\,2.\,3..n-1} D_\varepsilon^{n-1}(\varepsilon^{n+1} H_{(n)})$$

la quale in forza della relazione fra $H_{(n)}$, $K_{(n)}$ si ri-

durrà ad

$$A_{(n)} = \frac{1}{1.\,2.\,3\,..\,n-1}\, D_\varepsilon^{n-1}(\,\varepsilon^{n+1}\, D_\varepsilon\, K_{(n)}\,)$$

ove dobbiamo ricordarci di fare $\varepsilon = o$, $x = o$ dopo le derivazioni. Osservando inoltre che il primo termine dello sviluppo di $H_{(n)}$ è proporzionale ad $\frac{1}{\varepsilon^{n+1}}$, ed il primo termine di $K_{(n)}$ ad $\frac{1}{\varepsilon^n}$, avremo in generale

$$H_{(n)} = \frac{A}{\varepsilon^{n+1}} + \frac{A'}{\varepsilon^n} + \frac{A''}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{A'''}{\varepsilon^{n-2}} + \ldots$$

$$K_{(n)} = \frac{B}{\varepsilon^n} + \frac{B'}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{B''}{\varepsilon^{n-2}} + \ldots$$

e siccome

$$H_{(n)} = D_\varepsilon\, K_{(n)}$$

così per i coefficienti di $K_{(n)}$ sarà

$$B = -\frac{A}{n}, \quad B' = -\frac{A'}{n-1}, \quad B'' = -\frac{A''}{n-2}$$

e perciò

$$\varepsilon^{n+1} H_{(n)} = A + A'\varepsilon + A''\varepsilon^2 + A'''\varepsilon^3 + \ldots + A^{(n-1)}\, \varepsilon^{n-1} + \ldots$$

$$\varepsilon^n K_{(n)} = -\frac{A}{n} - \frac{A'}{n-1}\,\varepsilon - \frac{A''}{n-2}\,\varepsilon^2 \ldots - A^{(n-1)}\, \varepsilon^{n-1} \ldots\ldots$$

D'onde eseguendo $n-1$ derivazioni riguardo ad ε , e ponendo in seguito $\varepsilon = o$, si ricava

$$D_\varepsilon^{n-1}(\,\varepsilon^{n+1}\, H_{(n)}\,) = -\, D_\varepsilon^{n-1}(\,\varepsilon^n\, K_{(n)}\,)$$

quindi

$$A_{(n)} = -\frac{1}{1.\,2.\,3..\,n-1}\, D_\varepsilon^{n-1}(\,\varepsilon^n\, K_{(n)}\,)$$

o ciò che torna lo stesso per il valore di $K_{(n)}$

$$A_{(n)} = -\left(\frac{1}{1.\,2.\,3..\,n-1}\right)^2 \frac{1}{n}\, D_\varepsilon^{n-1}\, D_x^n \left(\varepsilon^n \log \frac{f(\alpha+\varepsilon, x)}{f(\alpha+\varepsilon, o)}\right)$$

Tal'è il valore di un coefficiente qualunque di una potenza della x, nello sviluppo della radice y dell'equazione

$$f(y, x) = o$$

Gli rinvenuti valori delle $y-\alpha$, $(y-\alpha)^2$ $(y-\alpha)^3$, ... sono d' accordo, come fa osservare il sig. Cauchy con analoghe formole date da Laplace, e da Paoli.

102. Supponiamo per una qualche applicazione l' equazione

$$y - \alpha - x\tilde{\omega}(y) = o$$

$\tilde{\omega}(y)$ una funzione la quale ritenga un valore finito per $y=\alpha$: se consideriamo la più piccola radice di quest' equazione, la quale si annulla per l'annullamento della differenza $y-\alpha$, noi avremo

$$\log \frac{f(\alpha+\varepsilon, x)}{f(\alpha+\varepsilon, o)} = \log\left(1 - \frac{x\tilde{\omega}(\alpha+\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$$

ed eseguendo n derivazioni riguardo ad x, otterremo

$$D_x^n \log \frac{f(\alpha+\varepsilon, x)}{f(\alpha+\varepsilon, o)} = -\frac{1.\,2.\,3..\,n-1 \left(\dfrac{\tilde{\omega}(\alpha+\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^n}{\left(1 - x\dfrac{\tilde{\omega}(\alpha+\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^n}$$

quindi per $x = o$

$$D_x^n \log \frac{f(\alpha+\varepsilon, x)}{f(\alpha+\varepsilon, o)} = -1.\,2.\,3..\,n-1 \left(\frac{\tilde{\omega}(\alpha+\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^n$$

Con questo valore, il coefficiente $A_{(n)}$ diverrà

$$A_{(n)} = \frac{1}{1.\,2.\,3..\,n} D_{\varepsilon}^{n-1} (\bar{\omega}(\alpha + \varepsilon))^n$$

Nel secondo membro deve farsi $\varepsilon = 0$ dopo le derivazioni, per cui $A_{(n)}$ si ridurrà evidentemente ad

$$A_{(n)} = \frac{1}{1.\,2.\,3..\,n} D_{\alpha}^{n-1} (\bar{\omega}(\alpha))^n$$

Di qui la più piccola radice della proposta equazione sarà

$$y = \alpha + x\,\bar{\omega}(\alpha) + \frac{x^2}{1\,.\,2} D_{\alpha} (\bar{\omega}(\alpha))^2 + \frac{x^3}{1.2.3} D_{\alpha}^2 (\bar{\omega}(\alpha))^3$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\;.$$

Tal'è la serie trovata da Lagrange per calcolare le radici dell'equazioni sì algebriche, che trascendenti. Indicando con Σ un simbolo sommatorio di termini simili, e per $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}$ quando ve ne sia un numero indefinito, la formola di Lagrange si esprimerà più brevemente per

$$y = \alpha + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1.\,2.\,3\,..\,n} D_{\alpha}^{n-1} (\bar{\omega}(\alpha))^n$$

Sia in un caso particolare l'equazione trascendente

$$y - x e^y = 0$$

noi avremo

$$\alpha = 0\,, \quad \bar{\omega}(y) = e^y\,, \quad (\bar{\omega}(y))^n = e^{ny}$$

d'onde la più piccola radice

$$y = x + 2\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + 3^2\,\frac{x^3}{1.2.3} + 4^3\,\frac{x^4}{1.\,2.\,3.\,4} + .\;.\;.$$

Questa serie sarà convergente quante volte la x sia inferiore al numero $\frac{1}{e}$.

Una dimostrazione rigorosa della formola di Lagrange si potrà ancora immediatamente dedurre dal Teorema di Mac-Laurin, qualora si premettano le condizioni della convergenza della serie: ciò che noi verremo brevemente ad indicare.

Rappresentando y una funzione delle x, abbiamo dalla formola di Mac-Laurin.

$$y = y_0 + y'_0 \frac{x}{1} + y''_0 \frac{x^2}{1.2} + y'''_0 \frac{x^3}{1.2.3} + y_0^{iv} \frac{x^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \ldots.$$

I valori delle derivate dovranno nel nostro caso desumersi dalla successiva derivazione dell'equazione

$$y - \alpha - x\,\bar{\omega}(y)$$

e si avrà evidentemente

$$y' - \bar{\omega}(y) - x\,\bar{\omega}'(y)\,y' = 0$$

$$y'' - 2\,\bar{\omega}'(y)\,y' - x\,\bar{\omega}''(y)\,y'^2 - x\,\bar{\omega}'(y)\,y'' = 0$$

$$y''' - 3\bar{\omega}''(y)\,y'^2 - 3\bar{\omega}'(y)\,y'' - 3x\bar{\omega}''(y)\,y'y'' - x\bar{\omega}'(y)\,y''' = 0$$

. . . .

Se ora facciamo $x = 0$ dedurremo i richiesti valori della funzione e delle derivate

$$y_0,\ y'_0,\ y''_0,\ y'''_0,\ y_0^{iv}, \ldots\ldots$$

e si avrà

$$y_0 = \alpha, \quad y'_0 = \bar{\omega}(\alpha), \quad y''_0 = 2\bar{\omega}'(\alpha)\,\bar{\omega}(\alpha)$$

$$y'''_0 = 3\bar{\omega}''(\alpha)\,[\bar{\omega}(\alpha)]^2 + 6\,[\bar{\omega}'(\alpha)]^2\,\bar{\omega}(\alpha)$$

. . . . . .

le quali si ridurranno ad

$$y_0 = \alpha\,, \quad y'_0 = \omega(\alpha)\,, \quad y''_0 = D_\alpha [\,\tilde{\omega}(\alpha)\,]^2$$

$$y'''_0 = D_\alpha^2 [\,\tilde{\omega}(\alpha)\,]^3\,, \quad y_0^{IV} = D_\alpha^3 [\,\tilde{\omega}(\alpha)\,]^4 \ldots .$$

e facendone la sostituzione nella formola di Mac-Laurin, otterremo quella di Lagrange per svilnppare in serie la più piccola radice della proposta equazione.

103.° Le precedenti ricerche si possono generalizzare, quando si cerchi una funzione qualunque della medesima radice, da svilupparsi in serie convergente, ed ordinata secondo le potenze ascendenti della x.

Sia

$$z = F(y)$$

una funzione continua della più piccola radice y determinata dalla solita equazione

$$y - \alpha - x\,\tilde{\omega}(y)$$

Considerando la z come una funzione della x, avremo dal Teorema di Mac-Laurin

$$z = z_0 + z'_0 \frac{x}{1} + z''_0 \frac{x^2}{1.2} + z'''_0 \frac{x^3}{1.2.3} + z_0^{IV} \frac{x^4}{1.\,2.\,3.\,4} + \ldots .$$

Le nuove funzioni z_0, z'_0, z''_0, z'''_0, ... devono dedursi dalla derivazione della z, rapporto alle x, e si troverà

$$z' = F'(y)\,y'\,, \quad z'' = F''(y)\,y'^2 + F'(y)\,y''$$

$$z''' = F'''(y)\,y'^3 + 3F''(y)\,y'y'' + F'(y)\,y'''$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Facendo ora $x = o$, e sostituendoci i valori di y_o, y'_o, y''_o . . . . . otterremo

$$z_o = F(\alpha), \quad z'_o = F'(\alpha)\,\varpi(\alpha),$$

$$z''_o = F''(\alpha)[\varpi(\alpha)]^2 + 2F'(\alpha)\,\varpi'(\alpha)\,\varpi(\alpha)$$

. . . . . .

ovvero

$$z_o = F(\alpha), \quad z'_o = F'(\alpha)\,\varpi(\alpha)$$

$$z''_o = D_\alpha.F'(\alpha)[\varpi(\alpha)]^2, \quad z'''_o = D^2_\alpha.F'(\alpha)[\varpi(\alpha)]^3$$

. . . .

$$z^{(n)}_o = D^{n-1}_\alpha.F'(\alpha)[\varpi(\alpha)]^n$$

e per conseguenza per l'indicata funzione della radice y della supposta equazione si ricava

$$F(y) = F(\alpha) + F'(\alpha)\,\varpi(\alpha)\frac{x}{1} + D_\alpha.F'(\alpha)[\varpi(\alpha)]^2\,\frac{x^2}{1.2}$$

$$+ D^2_\alpha.F'(\alpha)[\varpi(\alpha)]^3\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Questa formola è stata ancora data da Lagrange nelle Memorie dell'Accademia di Berlino; nel caso particolare di $\varpi(y) = 1$, o di $\varpi(\alpha) = 1$ allora la precedente formola si ridurrà ad

$$F(\alpha + x) = F(\alpha) + F'(\alpha)\frac{x}{1} + F''(\alpha)\frac{x^2}{1.2} + F'''(\alpha)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

la quale coincide con il Teorema di Taylor.

104.° Per mostrare una qualche applicazione delle diverse formole di Lagrange, consideriamo l' equazione

trascendente

$$u - nt - e \text{ sen } u = 0$$

ed avremo in questo caso

$$u = y, \quad \alpha = nt \,, \quad x = e \,, \quad \bar{\omega}(y) = \bar{\omega}(u) = \text{sen } u$$

quindi per la nota formola di Lagrange la più piccola radice u della supposta equazione si svilupperà in serie ordinata secondo le potenze ascendenti della e per mezzo dell'equazione

$$u = nt + e \text{ sen } nt + \frac{e^2}{1 \,.\, 2} D_{nt} \text{ sen}^2 nt + \frac{e^3}{1.2.3} D^2_{nt} \text{ sen}^3 nt$$

$$+ \frac{e^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} D^3_{nt} \text{ sen}^4 nt + \ldots\ldots$$

ed eseguendo le indicate derivazioni si trova ancora

$$n = nt + e \text{ sen } nt + \frac{e^2}{1 \,.\, 2} \text{ sen } 2nt$$

$$+ \frac{e^3}{1.\ 2.\ 3.\ 2^2} (3^2 \text{ sen } 3\, nt - 3 \text{ sen } nt)$$

$$+ \frac{e^4}{1.2.3.4.2^3} (4^3 \text{sen } 4\, nt - 4.2^3 \text{sen } 2\, nt) + \ldots ;$$

Questa serie sarà convergente per determinati valori del numero e.

Con la stessa facilità si giunge ad ottenere una funzione qualunque della medesima radice; così prendendo

$$F(u) = \cos u \,, \quad F'(u) = -\text{sen } u$$

si ricaverà dalla penultima formola dell'antecedente paragrafo

$$\cos u = \cos nt - e \text{ sen}^2 nt - \frac{e^2}{1.2} D_{nt} \text{ sen}^3 nt - \frac{e^3}{1.2.3} D^2_{nt} \text{ sen}^4 nt \ldots.$$

Qui pure ultimando le derivazioni si avrebbe lo sviluppo di $\cos u$.

La formola di Lagrange nel somministrare le radici dell'equazione conduce anche in alcune circostanze allo sviluppo di certe funzioni che potrebbe ottenersi ancora per altri metodi. Data per esempio l'equazione

$$y - \cos\theta - \frac{x}{2}(y^2 - 1) = 0$$

si ha non solo

$$\alpha = \cos\theta\,, \quad \varpi(x) = \frac{y^2 - 1}{2}$$

ma ben anche dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado

$$y = \frac{1 - (1 - 2x\cos\theta + x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

quindi dalla formola di Lagrange

$$y = \alpha + \frac{x}{2}(\alpha^2 - 1) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1\,.\,2} D_\alpha (\alpha^2 - 1)^2$$

$$+ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1.\,2.\,3} D_\alpha^2 (\alpha^2 - 1)^3 + \ldots\ldots$$

d'onde sostituendo nel primo membro il valore della y si ricava

$$(1 - 2x\cos\theta + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \alpha x - \frac{x^2}{2}(\alpha^2 - 1)$$

$$- \frac{x^3}{1.2.\,2^2} D_\alpha (\alpha^2 - 1)^2 - \frac{x^4}{1.\,2.\,2^3} D_\alpha^2 (\alpha^2 - 1)^3$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Lo sviluppo di questa funzione è convergente per valori della x minori dell'unità. Per una maggior estensione di queste teorie possono consultarsi le Memorie di Lagrange, di Laplace, di Paoli, e del sig. Cauchy, il quale per lo sviluppo delle funzioni in serie convergente stabilisce una proposizione della quale faremo solamente l' enunciato senza entrar in discussione alcuna della medesima. Una funzione reale, od immaginaria di una, o più variabili reali, od immaginarie si sviluppa in serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di queste variabili fintantochè i moduli di queste variabili conservano valori inferiori a quelli per i quali la funzione, o le sue derivate del primo ordine cessano di essere finite, e continue. Questo teorema, che l' autore ha pubblicato in Torino fino dagli anni 1831, e 1832, e che poi ha riprodotto negli Esercizi di Analisi, e di Fisica Matematica, è stato recentemente generalizzato ed esteso dal sig. Laurent. In un rapporto che il sig. Cauchy fa di una Memoria, ove trovasi l'estensione di questo teorema, dice che la nuova proposizione trovata dal sig. Laurent può ridursi a quanto siegue. Se x sia una variabile reale, od immaginaria, una funzione reale, od immaginaria della x potrà essere rappresentata per la somma di due serie convergenti ordinate l'una secondo le potenze intere ed ascendenti, l' altra secondo le potenze e le discendenti della x, fintantochè il modulo della x conserverà un valore compreso fra due limiti fra i quali la funzione, e la sua derivata non cessi di esser finita e continua.

Sulla decomposizione di una frazione razionale in frazioni semplici.

105.° Sieno $f(x)$, $F(x)$ due funzioni intere della x, e sia n il grado della seconda per lo meno maggiore di un'unità del grado della prima; se con queste si formi la frazione razionale

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

e si supponga ridotto all'unità il coefficiente di x^n nella funzione intera $F(x)$, allora chiamando a_0, a_1, a_2 .. a_{n-1} tutte le n radici disuguali dell'equazione $F(x)=0$, potrà come si sa dall'analisi algebrica, decomporsi la frazione razionale in un numero n di frazioni semplici della forma

$$\frac{A_0}{x-a_0}, \quad \frac{A_1}{x-a_1}, \quad \frac{A_2}{x-a_2}, \ldots \frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}}$$

in modo da essere

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{x-a_0}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}}$$

I coefficienti A_0, A_1, A_2 ... A_{n-1} sono costanti indipendenti dalla x, ed il Calcolo infinitesimale porge un metodo speditissimo per la determinazione dei medesimi; ed infatti moltiplicando il secondo membro per $F(x)$, abbiamo

$$f(x)=A_0\frac{F(x)}{x-a_0}+A_1\frac{F(x)}{x-a_1}+\ldots+A_{n-1}\frac{F(x)}{x-a_{n-1}}$$

Sostituendo successivamente in luogo della x le diverse

radici a_0, a_1, a_2 . . . a_{n-1} ciascuna delle frazioni

$$\frac{F(x)}{x-a_0}, \quad \frac{F(x)}{x-a_1}, \quad \frac{F(x)}{x-a_2}, \ldots\ldots \frac{F(x)}{x-a_{n-1}}$$

si presenta sotto la forma indeterminata di $\frac{0}{0}$, delle quali gli effettivi valori sono

$$F'(a_0), \quad F'(a_1), \quad F'(a_2), \ldots . \; F'(a_{n-1})$$

quindi per la determinazione dei coefficienti A_0, A_1, A_2 . . . A_{n-1} sussisteranno altrettante equazioni

$$f(a_0) = A_0 F'(a_0), \quad f(a_1) = A_1 F'(a_1), \ldots$$

$$f(a_2) = A_2 F'(a_2) \ldots f(a_{n-1}) = A_{n-1} F'(a_{n-1})$$

e per conseguenza

$$A_0 = \frac{f(a_0)}{F'(a_0)}, \quad A_1 = \frac{f(a_1)}{F'(a_1)}, \quad A_2 = \frac{f(a_2)}{F'(a_2)} \ldots\ldots A_{n-1} = \frac{f(a_{n-1})}{F'(a_{n-1})}$$

Questo metodo è generale, e sussiste nel caso ancora delle radici immaginarie, purchè sieno sempre disuguali, ed è di una facilissima applicazione ai diversi casi particolari. Supposta sempre reale la funzione $F(x)$, ed $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ una radice immaginaria dell' equazione $F(x) = 0$, lo sarà altresì radice della medesima equazione l'espression coniugata $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, in quest'ipotesi una coppia di frazioni semplici avrà per numeratore

$$\frac{f(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})}, \quad \frac{f(\alpha - \beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$$

e per denominatori i fattori lineari coniugati

$$x - \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad x - \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

Pongasi adesso

$$\frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}=A-B\sqrt{-1}$$

ed insieme

$$\frac{f(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})}=A+B\sqrt{-1}$$

le due frazioni semplici diverranno

$$\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}, \quad \frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

quali sommate, e ridotte porgono la frazione

$$\frac{2A(x-\alpha)+2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

priva di quantità immaginarie.

106.° Queste formole si applicano fra le altre allo spezzamento delle frazioni

$$\frac{x^m}{x^n-1}, \quad \frac{x^m}{x^n+1}$$

m, n essendo due numeri interi, $m<n$, ed n potendo essere o pari od impari. Considerando la prima frazione, noi avremo

$$f(x)=x^m, \quad F(x)=x^n-1$$

quindi tutte le radici disuguali dell'equazione

$$x^n=1$$

saranno della forma

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{2k\pi}{n}=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$$

Di qui per una qualunque di queste radici

$$\frac{f(x)}{F'(x)}=\frac{x^m}{nx^{n-1}}=\frac{x^{m+1}}{n}=\frac{1}{n}\left(\cos\frac{2k(m+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2k(m+1)\pi}{n}\right)$$

$$=A-B\sqrt{-1}$$

e perciò

$$\alpha=\cos\frac{2\,k\,\pi}{n},\quad \beta=\text{sen}\,\frac{2\,k\,\pi}{n}$$

$$A=\frac{1}{n}\left(\cos\frac{2k(m+1)\pi}{n}\right),\quad B=-\frac{1}{n}\,\text{sen}\,\frac{2k(m+1)\pi}{n}$$

dunque per ogni coppia di radici immaginarie coniugate si otterrà la frazione razionale

$$\frac{2A(x-\alpha)+2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{2}{n}\left\{\frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{2\,k\,m\,\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2\,k\,\pi}{n}+1}\right\}$$

Ora i valori di k per n impari sono

$$0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\ldots\frac{n-1}{2}$$

e per conseguenza sotto questa ipotesi

$$\frac{x^m}{x^n-1}=\frac{2}{n}\left\{\frac{1}{2(x-1)}+\frac{x\cos\frac{2(m+1)}{n}-\cos\frac{2\,m\,\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1}\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{x\cos\frac{(n-1)(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{(n-1)\,m\,\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\,\pi}{n}+1}\right\}$$

Quando n è pari, i valori di k, sono

$$0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots \frac{n-2}{2},\ \frac{n}{2}$$

e perciò

$$\frac{x^m}{x^n-1} = \frac{2}{n}\left\{\frac{1}{2(x-1)} + \frac{x\cos\frac{2(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{2m\pi}{n}}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1}\right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{x\cos\frac{(n-2)(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{(n-2)m\pi}{n}}{x^2 - 2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + 1} + \frac{(-1)^{m+1}}{2(x+1)}\right\}$$

L'ultimo termine di questa frazione convien porlo sotto l'ambiguità del segno, poichè per m impari

$$\cos m\pi = -1$$

e per m pari

$$\cos m\pi = 1$$

Nello stesso modo prendendo

$$f(x) = x^m, \qquad F(x) = x^n + 1$$

tutte le radici immaginarie disuguali dell'equazione

$$x^n = -1$$

sono comprese nella formola

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\ \text{sen}\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

Quando n è impari, allora tutti i valori che può rice-

vere k saranno

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ n-2,\ n$$

d'onde in questo caso

$$\frac{x^m}{x^n+1}=-\frac{2}{n}\left\{\frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1}\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{x\cos\frac{(n-2)(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1}+\frac{(-1)^{m+1}}{2(x+1)}\right\}$$

Nell'ipotesi di n pari, i valori che potrà ricevere k sono

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ n-1$$

e perciò supposto n pari

$$\frac{x^m}{x^n+1}=-\frac{2}{n}\left\{\frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1}\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{x\cos\frac{(n-1)(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1}\right\}$$

È facile poi di vedere cosa divengano queste differenti formole se il numero $m<n$ divenga eguale ad $n-1$.

107.° Se il grado n della funzione intera $F(x)$ risulti dal prodotto dei fattori ripetuti

$$(x-a)^{m'},\ (x-b)^{m''},\ (x-c)^{m'''},\ \ldots$$

per cui sia

$$F(x) = (x-a)^{m'}(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\dots$$

ed

$$m' + m'' + m''' + \dots = n$$

allora per ciascun fattore ripetuto, la frazion razionale si decomporrà in egual numero di frazioni che avranno il numeratore costante, e per denominatore le successive potenze dei medesimi fattori lineari decrescenti successivamente di un'unità, vale a dire

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^{m'}} + \frac{A_1}{(x-a)^{m'-1}} + \dots + \frac{A_{m'-1}}{x-a}$$

$$+ \frac{B_0}{(x-b)^{m''}} + \frac{B_1}{(x-b)^{m''-1}} + \dots + \frac{B_{m''-1}}{x-b}$$

$$+ \frac{C_0}{(x-c)^{m'''}} + \frac{C_1}{(x-c)^{m'''-1}} + \dots + \frac{C_{m'''-1}}{x-c}$$

$$+ \dots\dots$$

Alla determinazione dei primi coefficienti A_0, B_0, C_0 ... si giunge in un modo del tutto simile al precedente; si moltiplichi infatti il secondo membro per $F(x)$, è evidente che ciascuna delle frazioni

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{m'}},\ \frac{F(x)}{(x-b)^{m''}},\ \frac{F(x)}{(x-b)^{m'''}},\ \dots$$

si pone sotto la forma indeterminata di $\frac{0}{0}$, e per ricavare i veri valori dovremo eseguire m' derivazioni nella prima, m'' nella seconda, m''' nella terza, ... e si avrà

$$\frac{F^{(m')}(a)}{1.2.3..m'},\ \frac{F^{(m'')}(b)}{1.2.3..m''},\ \frac{F^{(m''')}(c)}{1.2.3..m'''},\ \dots$$

Ora la moltiplicazione per $F(x)$ nel secondo membro della frazione razionale, e la supposizione successiva di $x=a$, $x=b$, $x=c$, . . . annullerà tutti i termini ad eccezione di quei che hanno per coefficienti A_0, B_0, C_0, . . . e quindi per la determinazione dei medesimi abbiamo le condizioni

$$f(a)=A_0\frac{F^{(m')}(a)}{1.\,2.\,3\,.m'},\quad f(b)=B_0\frac{F^{(m'')}(b)}{1.\,2.\,3..\,m''}$$

$$f(c)=C_0\frac{F^{(m''')}(c)}{1.\,2.\,3\,..\,m'''},\ \ldots\ldots$$

dalle quali

$$A_0=\frac{1.\,2.3..\,m'f(a)}{F^{(m')}(a)},\quad B_0=\frac{1.\,2.\,3..\,m''f(b)}{F^{(m'')}(b)}$$

$$C_0=\frac{1.\,2.\,3..\,m'''f(c)}{F^{(m''')}(c)},\ \ldots.$$

Per gli altri coefficienti A_1, A_2 . . . $A_{m'-1}$ si moltiplichi il primo e secondo membro della frazion razionale per $(x-a)^{m'}$, sarà

$$\begin{aligned}\frac{f(x)\,(x-a)^{m'}}{F(x)}&=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots\ldots\\&+A_{m'-1}(x-a)^{m'-1}\\&+\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

ove eseguendo $m'-1$ derivazioni riguardo alla x, risulterà successivamente

$$\begin{aligned}D_x\frac{f(x)\,(x-a)^{m'}}{F(x)}&=A_1+2A_2(x-a)+3A_3(x-a)^2\\&+\ldots+(m'-1)\,A_{m'-1}(x-a)^{m'-2}\\&+\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$D_x^2 \frac{f(x)(x-a)^{m'}}{F(x)} = 2A_2 + 2.\,3A_3(x-a) + \ldots.$$
$$+ (m'-1)(m'-2)A_{m'-1}(x-a)^{m'-3}$$
$$+ \ldots\ldots$$

$$D_x^{m'-1} \frac{f(x)(x-a)^{m'}}{F(x)} = 1.\,2.\,3\ldots(m'-2)(m'-1)A_{m'-1}\ldots..$$

nelle quali ponendo $x=a$ svaniranno tutti i termini che moltiplicano B_0, B_1 . . . C_0, C_1 . . . . e rimarrà soltanto per A_1, A_2 . . . $A_{m'-1}$ la formola

$$A_{(r)} = \frac{1}{1.\,2.\,3\ldots r} D_x^r \frac{f(x)(x-a)^{m'}}{F(x)}$$

ove r sia fra i limiti $r=0$, $r=m'-1$

Il primo coefficiente A_0 si esprime anche per $x=a$ con

$$A_0 = \frac{f(x)(x-a)^{m'}}{F(x)}$$

e che si riduce a quello di già trovato.

Nello stesso modo se il secondo membro della frazione razionale si moltiplichi successivamente per $(x-b)^{m''}$, $(x-c)^{m'''}$, risulterà dopo la derivazione, e sostituzione di $x=b$, o di $x=c$, . . . per i coefficienti B_1, B_2 . . . C_1, C_2 l'espressione generica

$$B_{(r')} = \frac{1}{1.\,2.\,3\ldots r'} D_x^{r'} \frac{f(x)(x-b)^{m'}}{F(x)}$$

ed insieme

$$C_{(r'')} = \frac{1}{1.\,2.\,3\ldots r''} D_x^{r''} \frac{f(x)(x-c)^{m'''}}{F(x)}$$

nella prima r' compreso fra i limiti o, ed $m''-1$, e nella seconda fra o, ed $m'''-1$.

108.° La forma dei coefficienti A_0, A_1 ... B_0, B_1 .. C_0, C_1 ... non che il secondo membro della frazion razionale può ricevere alcune trasformazioni che è ben di conoscere.

Se ciascuna delle funzioni

$$\varphi(x),\quad \psi(x),\quad \chi(x),\ \ldots$$

rappresenti il prodotto di quei fattori della $F(x)$ di gradi

$$n-m'=m''+m'''+\ldots,\ n-m''=m'+m'''+\ldots..,$$

$$n-m'''=m'+m''+\ldots.$$

potremo porre identicamente

$$F(x)=(x-a)^{m'}\varphi(x)=(x-b)^{m''}\psi(x)=(x-c)^{m'''}\chi(x)=\ldots$$

d'onde per un coefficiente qualunque sarà

$$A_{(r)}=\frac{1}{1.\,2.\,3\,..\,r}\,D_x^{r}\,\frac{f(r)}{\varphi(x)}$$

$$B_{(r')}=\frac{1}{1.\,2.\,3..\,r'}\,D_x^{r'}\,\frac{f(r)}{\psi(x)}$$

$$C_{(r'')}=\frac{1}{1.\,2.\,3..\,r''}\,D_x^{r''}\,\frac{f(x)}{\chi(x)}$$

ove dopo le derivazioni si ponga $x=a$, $x=b$, $x=c$, ... Facciamo inoltre

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\Phi(x),\quad \frac{f(x)}{\psi(x)}=\Phi_1(x),\quad \frac{f(x)}{\chi(x)}=\Phi_2(x),\ \ldots.$$

i coefficienti diverranno

$$A_{(r)} = \frac{1}{1.\,2.\,3\,..\,r}\,\Phi^{(r)}(a)\,,\qquad B_{(r')} = \frac{1}{1.\,2.\,3\,..\,r'}\,\Phi_1^{(r')}(b)$$

$$C_{(r'')} = \frac{1}{1.\,2.\,3..\,r''}\,\Phi_2^{(r'')}(c)\,,\;.\;.\;.$$

Sostituendo adesso questi coefficienti nel secondo membro della frazion razionale, otterremo

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\Phi(a)}{(x-a)^{m'}} + \frac{\Phi'(a)}{(x-a)^{m'-1}} + \frac{1}{1\,.\,2}\,\frac{\Phi''(a)}{(x-a)^{m'-2}} +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1.\,2.\,3..\,m'-1}\,\frac{\Phi^{(m'-1)}(a)}{x-a}$$

$$+ \frac{\Phi_1(b)}{(x-b)^{m''}} + \frac{\Phi'_1(b)}{(x-b)^{m''-1}} + \frac{1}{1.\,2}\,\frac{\Phi_1''(b)}{(x-b)^{m''-2}}$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1.\,2.\,3..\,m''-1}\,\frac{\Phi_1^{(m''-1)}(b)}{x-b}$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Ora non è difficile di vedere che ciascun sistema di frazioni semplici relativa ad una radice a, non è altro che la derivata dell'ordine $m'-1$ riguardo ad una variabile ausiliare z della funzione

$$\frac{\Phi(z)}{x-z}$$

e divisa in fine per il prodotto $1.\,2.\,3..\,m'-1$, e so-

stituito a in luogo della z, cosicchè sia identicamente

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{1.2.3..m'-1}\,D_z^{m'-1}\,\frac{\Phi(z)}{x-z}$$

$$+\frac{1}{1.2.3..m''-1}\,D_z^{m''-1}\,\frac{\Phi_1(z)}{x-z}+\ldots\ldots$$

Questa formola ha il vantaggio di ridurre la decomposizione delle frazioni razionali all'ultimo grado di semplicità. Che se di più sostituiscansi i valori

$$\Phi(z)=\frac{f(z)}{F(z)}(z-a)^{m'},\qquad \Phi_1(z)=\frac{f(z)}{F(z)}(z-b)^{m''},\ \ldots\ldots$$

e facciasi ancora

$$f(x)=\frac{f(x)}{F(x)}$$

risulterà per lo spezzamento della frazione

$$f(x)=\frac{1}{1.2.3..m'-1}\,D_z^{m'-1}\,\frac{f(z)\,(z-a)^{m'}}{x-z}$$

$$+\frac{1}{1.2.3..m''-1}\,D_z^{m''-1}\,\frac{f(z)\,(z-b)^{m''}}{x-z}$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

ove dopo le derivazioni dei successivi termini si porrà $z=a$, $z=b$, ... Quando alcune delle radici a, b, c ... non fossero ripetute, allora $m'=m''=m'''\ldots=1$, ed il secondo membro diverrà

$$f(x)=\lim.\frac{f(z)\,(z-a)}{x-z}+\lim.\frac{f(z)\,(z-b)}{x-z}$$

e siccome

$$\lim f(z)\,(z-a) = \lim \frac{f(z)\,(z-a)}{F(z)} = \frac{f(a)}{F'(a)}$$

così otterremo immediatamente i valori dei coefficienti di già trovati nell'ipotesi delle radici ineguali della equazione $F(x) = 0$. Per riportare un qualche esempio sia la frazione razionale

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x+3)}$$

avremo dalla formola generale

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x+3)} = \frac{1}{(x-z)\,(z-1)^2} + D_z \frac{1}{(x-z)\,(z+3)}$$

Nel primo termine si deve porre $z = -3$, e nel secondo $z = 1$ dopo la derivazione, ed in questa ipotesi si trova

$$\lim \frac{1}{(x-z)\,(z-1)^2} = \frac{1}{16\,(x+3)}$$

$$D_z \frac{1}{(x-z)\,(z+3)} = \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{16(x-1)}$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{1}{16(x+3)} + \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{16\,(x-\ )}$$

109.° La formola generale alla quale siam giunti nel precedente paragrafo per la decomposizione delle frazioni razionali in frazioni semplici si applica con gran facilità al caso anche delle radici eguali reali; quando queste radici ripetute fossero immaginarie, le riduzioni fra

APPLICAZIONE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ALLA GEOMETRIA

INTRODUZIONE

Sulla posizione dei punti situati in un piano, o nello spazio, e sul limite verso il quale converge l' arco alla corda di una data curva.

110.° Da un gran tempo i geometri hanno immaginato di fissare la posizione dei punti situati in un piano, o nello spazio per mezzo di due, o di tre coordinate, che potranno scegliersi di differenti specie, fra le quali noi nomineremo in particolare le rettilinee, e le polari. Nel caso delle coordinate rettilinee, se gli assi, ai quali si riportano sono uniti ad angolo retto, allora gli assi si diranno rettangolari, od ortogonali, come ortogonali saranno le coordinate. Se si tratta di punti situati in un piano una delle coordinate dicesi *ordinata* e l'altra, *ascissa*, como asse delle ordinate, ed asse delle ascisse si chiamano le rette alle quali si riportano. Il punto d'intersezione degli assi per qualunque sistema di punti situati in un piano, o nello spazio dicesi origine delle coordinate. Una relazione generica

$$f(x, y) = o\,, \qquad o \qquad f(x, y) = C$$

fra l'ordinata y, e l'ascissa x, la quale proveniendo da una proprietà caratteristica della curva piana sussiste per tutti i punti della medesima, dicesi *Equazione* della curva o della linea. Prendendo l'ascissa x per variabile indipendente, l' ordinata y sarà funzione dell'

ascissa x, cosicchè supponendo l'equazione risoluta si farà

$$y = f(x)$$

Le curve, o le linee poi si distinguono in differenti ordini, che si desumono dal grado della funzione intera, o dell'equazione della quale sono espresse. Le curve di questo genere si dicono *algebriche*. Un'equazione fra x, y espressa da quantità trascendenti porge il nome di *trascendenti* alle curve alle quali si riferisce : in quest'ipotesi indefinito sarebbe l'ordine della curva, come indefinito è il grado dell'equazione : le coordinate *polari* dei punti situati in un piano si riducono ad una distanza variabile del punto mobile da un punto fisso, e ad un angolo variabile che questa distanza forma con una retta data di posizione che passa per il punto fisso. La distanza variabile dicesi *raggio vettore*, come *polo* si chiamerà il punto fisso. Spesse volte si rende assai utile l'avere l'equazione di curva piana a coordinate polari, ove si considera il raggio vettore funzione dell' angolo preso come variabile indipendente.

Quando i punti sono situati nello spazio, allora la coesistenza di due equazioni

$$\varphi(x, z) = 0 \ , \qquad \psi(y, z) = 0$$

fra le coordinate rettilinee x, y, z delle quali una qualunque z sia presa per variabile indipendente rappresenterà necessariamente il corso di una linea nello spazio, che suol anche chiamarsi *Curva a doppia curvatura*: una sola equazione

$$f(x, y, z) = 0$$

esprime una superficie curva, nella quale per ciascun valore di una delle coordinate porge una linea parallela

al piano delle altre due. Infine le due equazioni simultanee

$$f_0(x, y, z) = 0 , \quad f_1(x, y, z) = 0$$

rappresenteranno una linea a doppia curvatura proveniente dall'intersezione di due superficie curve ; eliminando successivamente le tre coordinate x, y, z, otterremo tre equazioni

$$\varphi(y, z) = 0 , \quad \psi(x, z) = 0 , \quad \chi(x, y) = 0$$

le quali appartengono alle projezioni della linea proposta nei piani yz , xz , xy , una qualunque delle tre è una conseguenza delle altre due , e perciò una linea nello spazio viene completamente determinata per mezzo delle curve di projezione nei tre piani coordinati. Le coordinate polari dei punti nello spazio si riducano ad un raggio vettore, e a due angoli compresi fra dati limiti.

111.° Veniamo ora a dimostrare un'importante proprietà delle curve, che si verifica per tutte quelle estenzioni di archi, ove non venga alterata la legge di continuità.

In un'arco di curva infinitamente piccolo immaginiamo due punti, che sieno inegualmente distanti dai punti estremi del medesimo arco, e si conducano per i quattro punti tre corde consecutive ; prolungando fino al loro incontro le due estreme, l'arco s intercetto fra i due punti medi è maggiore della corrispondente corda c, e minore della somma delle due rette spezzate comprese fra i punti medi fino al loro incontro determinato dal prolungamento delle corde estreme. Ciò posto sarà facile il provare che convergendo verso lo zero le due quantità c ed s si avrà

$$\lim \frac{c}{s} = 1$$

Ed infatti se in tutta l'estensione dell'arco infinitamente piccolo si mantiene la legge di continuità senza dar luogo ad alcun punto singolare, allora le corde che vanno da un punto ad un'altro comprenderanno angoli che infinitamente poco differiranno da due angoli retti: chiamando adunque ε l'angolo esterno infinitamente piccolo delle due rette a, b avremo dal triangolo (a, b, c) per un noto teorema di trigonometria

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,abc \cos \varepsilon$$

e sostituendoci

$$\cos \varepsilon = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

si dedurrà

$$c^2 = (a + b)^2 - 4\,ab \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

d'onde

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} = 1 - \frac{4\,ab}{(a+b)^2} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Per conoscere verso qual valore converga il secondo membro basterà avvertire che

$$\frac{4ab}{(a+b)^2} = 1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

è una quantità minore dell'unità, e perciò il coefficiente di $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\varepsilon$ non può divenir infinito, quindi per $\varepsilon = o$

$$\lim \frac{c}{a+b} = 1$$

e siccome l'arco $s < a + b$, così a più forte ragione

$$\lim \frac{c}{s} = 1$$

come ci eravamo proposto di dimostrare. Nelle applicazioni che faremo del Calcolo infinitesimale alla geometria uno dei mezzi di abbreviare i calcoli nell' uso delle coordinate o rettangolari, od oblique sarà, come osserva il sig. Cauchy, quello di risolvere le questioni per mezzo di formole ciascuna delle quali esprima l'eguaglianza di più frazioni, che sieno funzioni simili, o funzioni simmetriche delle coordinate.

APPLICAZIONI ALLA GEOMETRIA A DUE DIMENSIONI.

Sull'inclinazione di una Curva piana in un punto dato. Espressione del differenziale dell'arco. Equazione delle rette tangente e normale a questa curva.

112.° Una delle primarie ricerche del Calcolo differenziale alla geometria è di conoscere le inclinazioni che le curve presentano nei respettivi loro punti rapporto ad una data retta cognita di posizione: questa inclinazione si determina per mezzo di certe funzioni trigonometriche degli angoli che le rette tangenti alle curve formano con gli assi delle coordinate. Tal'è la questione che andiamo presentemente a risolvere in tutta la sua generalità nelle curve piane. Premetteremo che una retta tangente ad una curva in un punto dato è il limite verso il quale converge una secante condotta per questo punto, quando si faccia ruotare in modo che i due punti d'intersezione si riducano ad un solo.

Sieno pertanto x, y le coordinate rettilinee di un punto qualunque di una curva data rappresentata dalla equazione

$$y=f(x)$$

Se Δx, Δy sono incrementi infinitesimi delle due coordinate, e dal punto (x, y) si passi al punto $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ è evidente che immaginando una corda la quale passi per questi due punti della curva, e chiamando θ l'angolo che la medesima viene a formare con l'asse delle ascisse, ed A, l'angolo delle coordinate, sarà

$$\frac{\text{sen}\ \theta}{\text{sen}\ (A-\theta)}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

l'angolo θ si prenderà con il segno $+$, o con il segno $-$, secondo che il movimento della corda, o secante, è diretto, o retrogrado. Supponiamo adesso che gli indicati due punti della curva per i quali passa la corda, o secante vadano continuamente ad avvicinarsi, allora la corda verrà sensibilmente a confondersi con la curva nel punto (x, y); ed in altri termini verrà a prendere la direzione di una retta, la quale avrà un sol punto (x, y) commune con la curva, e che si chiamerà *tangente*: questa condizione verificandosi nel continuo decremento di Δx, Δy ne verrà che posto simultaneamente $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, il loro rapporto convergerà verso un limite positivo, o negativo, e differente da zero: questo limite coinciderà con il rapporto dei differenziali dx, dy, e per conseguenza chiamando φ il limite positivo, o negativo verso il quale converge l'angolo θ, si avrà

$$\frac{\text{sen}\ \varphi}{\text{sen}\ (A-\varphi)}=\pm\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\pm\frac{dy}{dx}$$

l'angolo φ è ciò che dicesi *Inclinazione della curva* al punto (x, y) rapporto all'asse della x. Il segno $+$ avrà luogo se la y cresce con la x, ed il segno $-$ nel caso opposto. La precedente espressione somministra il rapporto dei seni degli angoli che una retta tangente alla curva nel punto (x, y) forma con gli assi delle coordinate:

inoltre avendosi dall'equazione della curva

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

Così potremo anche scrivere

$$\frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } (A - \varphi)} = \frac{dy}{dx} = y'$$

Il secondo membro sarà positivo o negativo, secondo che la y cresce con la x, o viceversa. Da questa ultima formola si potrà dedurre l'espressione di una funzione trigonometrica dell'inclinazione φ per mezzo degli elementi della curva. Nell'ipotesi degli assi ortogonali si ha per $A = \frac{\pi}{2}$

$$\text{tang } \varphi = \frac{dy}{dx} = y'$$

cioè in una curva piana riferita a coordinate ortogonali, la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta toccante la curva nel punto (x, y) forma con l'asse delle ascisse è sempre eguale alla funzione prima derivata dell'ordinata y.

113.° Si sviluppi ora il seno della differenza $A-\varphi$, e si divida il primo e secondo membro per $\cos \varphi$, ricaveremo con facilità

$$\text{tang } \varphi = \frac{dy \text{ sen } A}{dx + dy \cos A}$$

ovvero

$$\text{tang } \varphi = \frac{y' \text{sen } A}{1 + y' \cos A}$$

Questa formola somministra egualmente la tangente trigonometrica d'inclinazione della curva al punto (x, y)

rapporto all'asse delle ascisse, e si riduce al valore della funzione prima derivata per $A = \frac{\pi}{2}$. Sostituendo nella precedente equazione il rapporto del seno al coseno, e separandoli fra di loro per mezzo di frazioni simmetriche, avremo

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{dy \operatorname{sen} A} = \frac{\cos\varphi}{dx + dy \cos A}$$

nelle quali il valor comune vien dato dalla teoria delle proporzioni per mezzo dell'eguaglianza

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{dy \operatorname{sen} A} = \frac{\cos\varphi}{dx + dy \cos A} = \pm \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi}}{\sqrt{dy^2 \operatorname{sen}^2 A + (dx + dy \cos A)^2}}$$

d'onde

$$\operatorname{sen}\varphi = \pm \frac{dy \operatorname{sen} A}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A}}$$

$$\cos\varphi = \pm \frac{dx + dy \cos A}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A}}$$

ove introducendovi la funzione derivata y' risulterà ancora

$$\operatorname{sen}\varphi = \pm \frac{y' \operatorname{sen} A}{\sqrt{1 + y'^2 + 2y' \cos A}}$$

$$\cos\varphi = \pm \frac{1 + y' \cos A}{\sqrt{1 + y'^2 + 2y' \cos A}}$$

Nell'ipotesi delle coordinate ortogonali si ha semplicemente

$$\operatorname{sen}\varphi = \pm \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad \cos\varphi = \pm \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

ovvero

$$\operatorname{sen}\varphi = \pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos\varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Da queste diverse formole si ottiene sempre l'inclinazione φ di una curva piana rapporto all' asse della x per mezzo delle differenti funzioni trigonometriche.

114.° La proprietà che abbiamo dimostrato per una curva qualunque sul limite del rapporto della corda all'arco, fa scoprire una relazione rimarcabile, che esiste fra i differenziali dx, dy, ed il differenziale del corrispondente arco; ed infatti chiamando s l' arco della curva compreso fra un punto fisso, ed il punto (x, y), rappresenteremo per Δs l' arco corrispondente ai punti (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ quindi se c sia la corda dell' arco Δs, avremo dal triangolo di lati, Δx, Δy, c le proporzioni

$$\frac{\Delta y}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\Delta x}{\operatorname{sen}(A-\theta)} = \frac{c}{\operatorname{sen} A}$$

Ora dalla prima proporzione si ricava

$$\frac{\Delta y \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\Delta x + \Delta y \cos A}{\cos\theta}$$

e perciò

$$\frac{\Delta y \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\Delta x + \Delta y \cos A}{\cos\theta} = c$$

Inoltre

$$\frac{\Delta y \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\Delta x + \Delta y \cos A}{\cos\theta} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta x \Delta y \cos A}$$

dunque per il valor della corda otterremo

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta x\,\Delta y \cos A}.$$

Questa espressione si potea anche dedurre da un noto

teorema di trigonometria. Per trovare l'equazioni ai limiti si osservi che in generale l' arco s è funzione di una delle due coordinate, cosicchè prendendo

$$s = F(x)$$

si ha

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} = F'(x)$$

Dividendo adunque l'arco Δs per la corda c, e passando ai limiti si ottiene

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = 1 = \lim \frac{\Delta s}{\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + 2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cos A}}$$

ma

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx}, \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$$

dunque

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A}$$

ovvero

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2 + 2y'\cos A}$$

Nel caso delle coordinate ortogonali, i precedenti valori si ridurranno a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \qquad ds = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

È facile ora ottenere i valori di sen φ, cos φ d'inclinazione della curva espressi per i differenziali dx, dy, ds, e per le formole stabilite nell'antecedente parag. avremo

$$\operatorname{sen} \varphi = \pm \frac{dy \operatorname{sen} A}{ds}, \qquad \cos \varphi = \pm \frac{dx + dy \cos A}{ds}$$

quali sono comprese nelle consuete proporzioni

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{dy \operatorname{sen} A} = \frac{\cos\varphi}{dx + dy \cos A} = \pm \frac{1}{ds}$$

Per gli assi ortogonali abbiamo

$$\operatorname{sen}\varphi = \pm \frac{dy}{ds}, \quad \cos\varphi = \pm \frac{dx}{ds}$$

ad ambedue sono comprese nelle proporzioni

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{dy} = \frac{\cos\varphi}{dx} = \pm \frac{1}{ds}$$

Tali sono le formole più interessanti per rappresentare l' inclinazione di una curva piana rapporto ad un dato asse in qualunque sistema di coordinate rettilinee.

115.° La retta tangente avendo la proprietà di passare per il punto unico (x, y) della curva sarà facile formare la sua equazione. Chiamiamo Y, X le coordinate di un punto qualunque della medesima retta si avrà

$$\frac{X - x}{\operatorname{sen}(A - \varphi)} = \frac{Y - y}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Sostituendo il rapporto dei differenziali dx, dy al rapporto dei seni, sarà per l'equazione della tangente alla curva nel punto (x, y)

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}$$

Queste formole sussistono qualunque sia l'inclinazione A degli assi coordinati.

Una retta dicesi *normale* ad una curva nel punto (x, y), quando è perpendicolare alla retta tangente nel medesimo punto. Ciò posto siano X_1, Y_1 le coordinate di un punto qualunque di questa retta perpendicolare, e rappresenti ω l'angolo che la medesima contiene con l'asse delle ascisse, avremo primieramente

$$\frac{X_1 - x}{\text{sen}\,(A - \omega)} = \frac{Y_1 - y}{\text{sen}\,\omega}$$

Se vogliano che questa retta sia perpendicolare alla tangente, converrà che le due inclinazioni φ, ed ω verifichino la condizione

$$1 + \text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\omega = 0$$

Ma dallo sviluppo di sen $(A - \omega)$ dedurremo con gran facilità

$$\text{tang}\,\omega = \frac{(Y_1 - y)\,\text{sen}\,A}{X_1 - x + (Y_1 - y)\cos A}$$

e per l'inclinazione φ fu trovato

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{dy\,\text{sen}\,A}{dx + dy\cos A}$$

dunque

$$\frac{(Y_1 - y)\,\text{sen}\,A}{X_1 - x + (Y_1 - y)\cos A} = -\frac{dx + dy\cos A}{dy\,\text{sen}\,A}$$

ove facendo la separazione delle variabili $X_1 - x$, $Y_1 - y$, avremo in fine

$$\frac{Y_1 - y}{dx + dy\cos A} = -\frac{(X_1 - x)}{dy + dx\cos A}$$

Tale sarà l'equazione della retta normale alla curva nel punto (x, y). Introducendovi la funzione derivata y', diverrà

$$\frac{Y_1 - y}{1 + y'\cos A} = - \frac{(X_1 - x)}{y' + \cos A}$$

Togliendo poi i denominatori, ed ordinando rapporto ad X_1, Y_1 e chiamando r la distanza dell'origine al punto (x, y), ossia facendo

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos A$$

avremo

$$X_1(dx + dy \cos A) + Y_1(dy + dx \cos A) = rdr$$

ovvero

$$(X_1 + Y_1 \cos A)\, dx + (Y_1 + X_1 \cos A)\, dy = rdr$$

Per la supposizione di $A = \frac{\pi}{2}$ si riducono ad

$$\frac{Y_1 - y}{-dx} = \frac{X_1 - x}{dy}\,, \quad \text{ed} \quad Y_1 - y = -\frac{1}{y'}(X_1 - x)$$

ed insieme

$$X_1\, dx + Y_1\, dy = rdr$$

Da queste formole si vede, che l'Equazione della normale cangia di forma nel passare da un sistema obliquo ad un sistema rettangolare di coordinate. Infine per l'inclinazione ω della medesima normale all'asse delle ascisse, abbiamo

$$\operatorname{tang} \omega = - \frac{(dx + dy \cos A)}{dy \operatorname{sen} A}$$

Che se si sostituisca alla tangente trigonometrica il rapporto del seno, al coseno, e si faccia la separazione

delle variabili dedurremo

$$\frac{\text{sen}\,\omega}{-(dx+dy\cos A)}=\frac{\cos\omega}{dy\,\text{sen}\,A}=\pm\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2+2dx\,dy\cos A}}$$

ovvero

$$\text{sen}\,\omega=\mp\frac{dx+dy\cos A}{ds}\,,\quad \cos\omega=\pm\frac{dy\,\text{sen}\,A}{ds}$$

Quando gli assi sono ortogonali, si avrà

$$\text{sen}\,\omega=\mp\frac{dx}{ds}\,,\quad \cos\omega=\pm\frac{dy}{ds}$$

Ognun vede che fra gli angoli φ, ω sussiste la relazione

$$\omega-\varphi=\frac{\pi}{2}$$

116.° Oltre l'ottenuta espressione del differenziale ds dell'arco, se ne può dedurre qualcun'altra, che potrà essere utile a conoscersi. Riprese le proporzioni

$$\frac{dy\,\text{sen}\,A}{\text{sen}\,\varphi}=\frac{dx+dy\cos A}{\cos\varphi}=ds$$

si moltiplichi, e si divida la prima per senφ, e la seconda per cos φ, e dividendo poi la somma dei due numeratori per la somma dei due denominatori, la nuova frazione rappresenterà anche il valor comune delle medesime, ed in conseguenza

$$\frac{dy\,\text{sen}\,A}{\text{sen}\,\varphi}=\frac{dx+dy\cos A}{\cos\varphi}=dy\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\varphi+dx\cos\varphi+dy\cos A\cos\varphi$$

d'onde

$$ds=dx\cos\varphi+dy\cos(A-\varphi)$$

Nel caso degli assi ortogonali si riduce a

$$ds = dx \cos \varphi + dy \operatorname{sen} \varphi$$

Sulle precedenti formole faremo un'osservazione non priva d'importanza. Se ai differenziali dx, dy si sostituiscano Δx, Δy, ed all'angolo φ, l' inclinazione θ della corda c con l'asse della x, allora in luogo di ds dovrà sostituirsi c, per cui fra le altre avremo

$$c = \Delta x \cos \theta + \Delta y \cos (A - \theta)$$

Questa formola si realizza non solo con quanto si è detto sul principio del paragrafo 114; ma ben anche dall'osservare che i lati Δx, Δy producono sul terzo lato c due projezioni ortogonali

$$\Delta x \cos \theta, \qquad \Delta y \cos (A - \theta)$$

la somma delle quali è compresa nell' intera lunghezza del lato c.

117.° Prima di venire a particolari applicazioni delle precedenti teorie fermiamoci alquanto a vedere le modificazioni, che prenderanno alcune delle formole stabilite, quando l'equazione della curva sia rappresentata da una funzione implicita delle due coordinate. Se per brevità pongasi

$$u = f(x, y)$$

e c sia una costante qualunque, supporremo che l'equazione sia data da

$$u = c, \quad \text{o} \quad f(x, y) = c$$

ed avremo dalla differenziazione

$$D_x u \, dx + D_y u \, dy = 0, \quad \text{ed} \quad y' = -\frac{D_x u}{D_y u} = \frac{dy}{dx}$$

dalla quale

$$\frac{dx}{D_y u} = \frac{dy}{-D_x u}$$

ove applicando il consueto principio delle frazioni simmetriche sarà

$$\frac{dx}{D_y u} = \frac{dy}{-D_x u} = \pm \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A}}{\sqrt{(D_x u)^2 + (D_y u)^2 - 2D_x u\, D_y u \cos A}}$$

e ponendo per brevità

$$R = (D_x u)^2 + (D_y u)^2 - 2D_x u\, D_y u \cos A)^{\frac{1}{2}}$$

si troverà

$$dx = \pm \frac{ds\, D_y u}{R}\ ,\quad dy = \mp \frac{ds\, D_x u}{R}$$

Con questi valori, l'espressioni di sen φ, cos φ ottenuti alla fine del parag. 114 si trasformeranno in

$$\text{sen}\,\varphi = \mp \frac{D_x u \text{ sen } A}{R}\ ,\quad \cos\varphi = \pm \frac{D_y u - D_x u \cos A}{R}$$

e l' equazione della tangente ottenuta al principio del parag. 115 diverrà

$$(X - x)\, D_x u + (Y - y)\, D_y u = o$$

Cioè dall'equazione differenziale della curva si passa all' equazione della retta tangente col sostituire ai differenziali dx, dy le differenze $X - x$, $Y - y$: ciò avrà luogo in qualunque sistema di coordinate rettilinee. Se i medesimi valori di dx, dy si sostituiscano nei secondi membri di sen ω , cos ω del parag. 115 otterremo per l'inclinazione ω della retta normale rapporto all'asse delle

ascisse

$$\text{sen}\,\omega = \pm \frac{D_y u - D_x u \cos A}{R}, \quad \cos\omega = \pm \frac{D_x u \,\text{sen}\, A}{R}$$

e per l'equazione della medesima

$$\frac{Y_1 - y}{D_y u - D_x u \cos A} = \frac{X_1 - x}{D_x u - D_y u \cos A}$$

nella quale superando le derivate $D_x u$, $D_y u$ avremo

$$(Y_1 - y + (X_1 - x)\cos A)\, D_x u - (X_1 - x + (Y_1 - y)\cos A) D_y u = o$$

Cioè dall'equazione differenziale della curva si passa all' equazione della normale col sostituire ai differenziali dx, dy le differenze

$$Y_1 - y + (X_1 - x)\cos A, \quad -[\,X_1 - x + (Y_1 - y)\cos A\,]$$

Quando gli assi fossero ortogonali la R diviene

$$R = \left((D_x u)^2 + (D_y u)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

I differenziali dx, dy rimangono della medesima forma, ma per sen φ, cos φ, si ha

$$\text{sen}\,\varphi = \mp \frac{1}{R} D_x u, \quad \cos\varphi = \pm \frac{1}{R} D_y u$$

come per sen ω, cos ω

$$\text{sen}\,\omega = \pm \frac{1}{R} D_y u, \quad \cos\omega = \pm \frac{1}{R} D_x u$$

Infine per la retta normale deduciamo

$$(Y_1 - y)\, D_x u - (X_1 - x)\, D_y u = o$$

Quindi nel caso degli assi ortogonali dall'equazione differenziale della curva si passa all'equazione della normale col sostituire ai differenziali dx, dy le differenze

$$Y_1 - y\,, \quad -(X_1 - x)$$

Nell'equazione $u = c$, la funzione u sia omogenea del grado m, si avrà

$$xD_x u + yD_y u = mu$$

d'onde l'ottenuta equazione della tangente si trasformerà in

$$X\,D_x u + Y\,D_y u = mc$$

Rappresentino adesso u, v, w .... altrettante funzioni omogenee a due variabili x, y la prima del grado m, la seconda del grado $m - 1$, e la terza di $m - 2$, ... e supponiamo, che l'equazione della curva sia generalmente

$$u + v + w + ... = c$$

è evidente che l'equazione della tangente sarà

$$(D_x u + D_x v + D_x w + ...)(X - x) + (D_y u + D_y v + D_y w + ...)(Y - y) = 0$$

ma per il teorema delle funzioni omogenee ciascuna delle u, v, w .... verifica le condizioni

$$xD_x u + yD_y u = mu\,, \quad xD_x v + yD_y v = (m-1)\,v$$

$$xD_x w + yD_y w = (m-2)\,w\,,\ .\ .\ .$$

dunque infine l'equazione della tangente si ridurrà semplicemente ad

$$X(D_x u + D_x v + D_x w + ...) + Y(D_y u + D_y v + D_y w + ...)$$
$$= mc - v - 2w - \ldots\ldots$$

La quale sussiste in qualunque sistema di coordinate rettilinee.

118.° Veniamo ora ad alcune applicazioni e consideriamo una linea del second'ordine racchiusa nell'equazione generale

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2A'x + 2B'y = K$$

Differenziando sarà

$$(Ax + Cy + A')\,dx + (By + Cx + B')\,dy = o$$

e quindi

$$y' = -\frac{Ax + Cy + A'}{By + Cx + B'}\,.$$

Se si chiami ε l'angolo degli assi, dalla seconda formola del parag. 113 abbiamo

$$\tang \varphi = -\frac{(Ax + Cy + A')\,\text{sen}\,\varepsilon}{By + Cx + B' - (Ax + Cy + A')\cos\varepsilon}$$

Sostituendo nel primo membro il rapporto del seno al coseno, e facendo la separazione delle linee trigonometriche, sarà

$$\frac{\text{sen}\,\varphi}{(Ax + Cy + A')\,\text{sen}\,\varepsilon} = \frac{\cos\varphi}{(Ax + Cy + A')\cos\varepsilon - (By + Cx + B')}$$

Pongasi ora per brevità

$$\mathrm{A} = A^2 + C^2 - 2AC\cos\varepsilon\,,\quad \mathrm{B} = B^2 + C^2 - 2BC\cos\varepsilon$$

$$\mathrm{C} = AC + BC - (C^2 + AB)\cos\varepsilon$$

$$\mathrm{A}' = AA' + CB' - (A'B + A'C)\cos\varepsilon$$

$$\mathrm{B}' = A'C + BB' - (A'B + B'C)\cos\varepsilon$$

$$\mathrm{K} = A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\varepsilon$$

si otterrà per il valore comune

$$\frac{\text{sen}\,\varphi}{(Ax+Cy+A')\,\text{sen}\,\varepsilon}=\frac{\cos\varphi}{(Ax+Cy+A')\cos\varepsilon-(By+Cx+B')}$$

$$=\frac{1}{(Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y+K)^{\frac{1}{2}}}$$

Infine ponendo

$$h=\frac{K\,\text{sen}\,\varepsilon}{(Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y+K)^{\frac{1}{2}}}$$

si dedurrà

$$\text{sen}\,\varphi=\frac{h\,(Ax+Cy+A')}{K}$$

$$\cos\varphi=\frac{h\,[(Ax+Cy+A')\cos\varepsilon-(By+Cx+B')]}{K\,\text{sen}\,\varepsilon}$$

Tali sono le differenti funzioni trigonometriche dell'inclinazione φ che in un determinato punto una linea di secondo ordine fa rapporto all' asse delle ascisse. Per l'equazione poi della retta tangente, avremo dall'equazione differenziale della curva

$$(Ax+Cy+A')\,(X-x)+(By+Cx+B')\,(Y-y)=0$$

ove eseguendo le indicate moltiplicazioni, e riduzioni si trova

$$AXx+BYy+2C\left(\frac{Xy+Xx}{2}\right)+2A'\left(\frac{X+x}{2}\right)+2B'\left(\frac{X+y}{2}\right)=K$$

la quale ci dice, che per passare dall' equazione delle

linee del second'ordine all'Equazione delle loro *tangenti*, basterà sostituire ai quadrati x^2, y^2, i rettangoli Xx, Yy al prodotto xy la semisomma dei prodotti $Xy + Yx$, ed alle x, y le semisomme di $X + x$, $Y + y$. Ciò avrà luogo qualunque sia l'inclinazione degli assi. Non è difficile a vedersi, come mostreremo in appresso, che la quantità h rappresenta la perpendicolare abbassata dall' origine delle coordinate sopra la direzione della tangente. Se nell'equazione della tangente si supponga noto il punto (X, Y) ed incognito il punto (x, y) della curva, allora la questione si riduce a condurre da un punto dato (X, Y) fuori di una linea di secondo ordine una retta tangente alla medesima curva. In quest'ipotesi combinando per via di sottrazione l'equazione della curva, e della tangente, e fatto per semplicità

$$x - \frac{X}{2} = \xi, \qquad y - \frac{Y}{2} = \eta$$

$$K_1 = \frac{AX^2 + BY^2 + 2CXY + 2A'X + 2B'Y}{4}$$

troveremo per le nuove coordinate ξ, η l'equazione

$$A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta + 2A'\xi + 2B'\eta = K_1$$

la quale appartiene egualmente ad una linea di secondo ordine, e determinerà i punti di contatto della prima con la sua intersezione.

119.° L'equazione della tangente ordinata rapporto ad X, Y o ad x, y porge sempre una funzione lineare delle X, Y, o delle x, y, e si avrà nel primo caso

$$(Ax+Cy+A')\,X + (By + Cx + B')Y = K - (A'x + B'y)$$

e nel secondo

$$(AX+CY+A')\,x + (BY+CX+B')y = K - (A'X + B'Y)$$

Quante volte venga dato il solo punto (x, y) nella curva, non si potrà in generale condurre, che una sola tangente, ma all'opposto dato il punto esterno (X, Y) si potranno condurre più tangenti alla medesima curva. Immaginiamo adunque due punti in una linea di secondo ordine congiunti per mezzo di una corda; se da questi punti si conducano le loro respettive tangenti, s'intersecheranno in un punto (X, Y), e fra le coordinate X, Y, ed x, y sussisterà la riferita equazione nella quale considerando variabili x, y potrà anche servire a rappresentare la retta, che unisce i due punti di contatto. Supponiamo che l'equazione di questa corda sia della forma

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

allora per determinare il punto d'incontro (X, Y) delle due rette tangenti si avrà

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{AX + CY + A'}{K - (A'X + B'Y)}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{BY + CX + B'}{K - (A'X + B'Y)}$$

le quali risolute rapporto ad X, Y saranno le coordinate del punto d' incontro. Supposto poi che fra le $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ sussista una qualche relazione

$$F\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0$$

allora dopo di aver sostituito i valori di $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ otterremo fra X, Y un' equazione la quale appartiene al luogo geometrico del vertice X, Y, e dipendente dalla condizione a cui deve per ipotesi soddisfare la corda che unisce i due punti di contatto. Questo risultato si può enunciare nel modo seguente. « Se la retta che unisce i due punti di contatto in una linea del secondo

ordine si muova in modo che i coefficienti della sua equazione soddisfino ad una data condizione, il punto d'incontro delle rette tangenti percorre una linea del grado stesso di questa condizione. » Così sarà facile il provare che se la linea de' contatti di due tangenti ad una curva di secondo ordine si muove in modo da passare costantemente per un punto fisso, il punto d'incontro delle due tangenti percorrerà una retta. Con egual facilità proveremo ancora che se la linea de'contatti si muova tangenzialmente ad una linea di secondo ordine, il punto d'incontro delle due tangenti percorrerà una curva parimenti del secondo ordine. La linea de' contatti dicesi retta *polare* della curva del secondo ordine relativa al *polo* (X, Y); la considerazione dei *poli*, e delle rette *polari* si adopra utilmente per scuoprire un gran numero di proprietà delle linee del secondo ordine.

120.° Per l'equazione poi della normale avremo dalle formole del parag. 115

$$(X_1+Y_1\cos\varepsilon)(By+Cx+B')-(Y_1+X_1\cos\varepsilon)(Ax+Cy+A')$$
$$=(C-A\cos\varepsilon)x^2+(B\cos\varepsilon-C)y^2+(B-A)xy$$
$$+(B'-A'\cos\varepsilon)x+(B'\cos\varepsilon-A')y$$

la quale ordinata rapporto ad X_1, Y_1 darà

$$((By+Cx+B')\cos\varepsilon-(Ax+Cy+A'))Y_1$$
$$+((By+Cx+B')-(Ax+Cy+A')\cos\varepsilon)X_1$$
$$=(C-A\cos\varepsilon)x^2+(B\cos\varepsilon-C)y^2+(B-A)xy$$
$$+(B'-A'\cos\varepsilon)x+(B'\cos\varepsilon-A')y$$

Se in quest'equazione si considerino variabili le x, q, e costanti le X_1, Y_1, allora rappresenterà una nuova

linea del secondo ordine della forma

$$Lx^2 + My^2 + 2Pxy + 2Qx + 2Ry = S$$

I nuovi coefficienti sono

$$L = C - A\cos\varepsilon\,,\ M = B\cos\varepsilon - C\,,\ 2P = B - A = \frac{M+L}{\cos\varepsilon}$$

$$2Q = B' - A'\cos\varepsilon + (A - C\cos\varepsilon)\,Y_1 + (A - C)\,X_1$$

$$2R = B'\cos\varepsilon - A' + (C - B\cos\varepsilon)\,Y_1 + (C - B)\,X_1$$

$$S = (A' - B'\cos\varepsilon)\,Y_1 + (B' - A'\cos\varepsilon)\,X_1$$

Eliminando infine fra le due equazioni del second'ordine a due variabili x, y una qualunque di esse si giungerà ad un'equazione risultante di quarto grado. Di qui ne segue che se questa equazione a coefficienti reali avrà le sue quattro radici reali, e disuguali, o due reali ripetute ed anche due radici reali, e due immaginarie conjugate, il numero delle normali, che da un punto dato $(X_1\,,\ Y_1)$ si possono condurre ad una linea di secondo ordine, sarà quattro, o si ridurrà o a tre, o a due: noi esamineremo in particolare queste differenti circostanze nella parabola, nell'ellissi, e nell'iperbola, e vedremo che nella parabola l'equazione risultante si ridurrà al terzo grado, e perciò potrà essere anche unica la normale che da un punto dato si voglia condurre ad un qualche punto della curva. Avvertiremo, che la relazione trovata fra i coefficienti P, M, L non può aver luogo nel caso degli assi ortogonali. Così supponendo le coordinate rettangolari e nello stesso $C^2 = AB$ come accade nella parabola, la nuova linea del second'ordine rappresenterà una iperbola, come si scorgerà dalla condizione che verificheranno i nuovi coefficienti L, M, P. Dall'ultime formole poi del medesimo paragrafo 115 si

ottengono i valori di $\operatorname{sen}\omega$, $\cos\omega$ per l'inclinazione ω della normale rapporto all'asse delle ascisse, ma questi valori saranno evidentemente

$$\operatorname{sen}\omega = \cos\varphi\,, \qquad \cos\omega = -\operatorname{sen}\varphi$$

dai quali già i secondi membri son cogniti per quanto è stato trovato nelle linee del secondo ordine. Per analizzare più semplicemente le proprietà delle linee del secondo ordine provenienti dalla considerazione della tangente, e della normale, sceglieremo particolarmente la parabola, l'ellissi, e l'iperbola.

121.° Una parabola riferita ad assi obliqui e diametrali ha per equazione

$$y^2 = px$$

d'onde per la differenziazione

$$2y\, dy = p\, dx\,, \qquad y' = \frac{\beta}{2y}$$

Di qui la consueta formola del parag. 113 per l'inclinazione φ della curva rapporto all'asse dell'ascissa sarà

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{p \operatorname{sen} A}{2y + p \cos A}$$

dalla quale

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{p \operatorname{sen} A} = \frac{\cos\varphi}{2y + p\cos A} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 4y^2 + 4py\cos A}}$$

e quindi

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{p \operatorname{sen} A}{\sqrt{p^2 + 4y^2 + 4py \cos A}}$$

$$\cos\varphi = \frac{2y + p\cos A}{\sqrt{p^2 + 4y^2 + 4py \cos A}}$$

Queste formole si renderanno più semplici quando s'introduca una trasformazione di ordinata, e di parametro. Chiamiamo infatti m il parametro calcolato sopra la direzione dell'asse che passa per il vertice della parabola, e sia Y la perpendicolare abbassata dal punto (x, y) sopra quest'asse, si avrà con facilità

$$p = \frac{m}{\text{sen}^2 A}, \quad Y = y \,\text{sen}\, A + \frac{m}{2} \,\text{sen}\, A \cos A$$

d'onde

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{m}{2Y}, \text{sen}\, \varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 4Y^2}}, \cos \varphi = \frac{2Y}{\sqrt{m^2 + 4Y^2}}$$

Queste espressioni si possono dedurre dalla considerazione diretta degli assi ortogonali, poichè in tal caso, l'equazione

$$y^2 = mx$$

porge

$$\text{tang}\, \varphi = y' = \frac{m}{2y}$$

ed osservando che il raggio vettore r condotto dal fuoco al punto (x, y), è

$$r = x + \frac{1}{4} m$$

avremo ancora

$$\text{sen}\, \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{r}}, \quad \cos \varphi = \sqrt{\frac{x}{r}}$$

L'equazione della tangente sarà

$$2y (Y - y) = p (X - x)$$

ovvero

$$Yy = p\left(\frac{X+x}{2}\right)$$

la quale sussiste in qualunque sistema di assi diametrali; dalla medesima deduciamo che l'ordinata all'origine è $\frac{px}{2y} = \frac{y}{2}$, e perciò la retta che dall'origine delle coordinate si conduce nella direzione dell'asse delle y fino all'incontro della tangente è eguale alla metà dell' ordinata del punto di contatto ; di qui se ne ricava un metodo semplicissimo per condurre una tangente ad un punto qualunque della parabola; infine ritenendo

$$x - \frac{X}{2} = \xi \,, \qquad y - \frac{Y}{2} = \eta$$

e combinando per via di sottrazione l' equazione della curva, e della tangente, si otterrà

$$\eta^2 = \frac{p\xi}{2} + \frac{Y^2 - pX}{4}$$

la quale appartiene ad una nuova parabola, ed i punti d' incontro di questa con la proposta determineranno i punti di contatto; l'equazione dell'asse parallelo all'asse della parabola data ha per equazione

$$\eta = o \,, \qquad \text{ovvero} \qquad y = \frac{Y}{2}$$

se dunque sieno cognite le coordinate X, Y di un punto fuori della parabola, la precedente equazione fra le ξ, η, risolve il seguente problema : « Da un punto dato condurre una tangente ad una parabola : alla questione ci si può soddisfaro per più soluzioni. L'equazione alla

normale nel sistema degli assi ortogonali sarà

$$Y_1 - y = -\frac{2y}{p}(X_1 - x)$$

Questa retta incontra l'asse delle y ad una distanza dall' origine eguale a $\frac{py + 2ry}{p}$, e l'asse della x ad una distanza eguale ad $x + \frac{p}{2}$. La medesima equazione si potrà rappresentare per

$$y(x - X_1 + \frac{p}{2}) = \frac{pY_1}{2}$$

la quale appartiene ad una iperbola fra gli assintoti, quante volte si considerino variabili le x, y. Gli assintoti sono l'asse delle y, ed una retta di equazione $x = X_1 - \frac{p}{2}$; ciò é d' accordo con quanto si osservò nell'equazione generale della retta normale alle linee del secondo ordine.

Per conoscere ora il numero delle normali che da un punto fuori della parabola possono condursi ai differenti punti della medesima, riprendiamo le due equazioni, alla curva ed alla normale, cioè

$$y^2 = px \qquad yx = (X_1 - \frac{p}{2})\, y + \frac{p}{2} Y_1$$

e moltiplicandole fra di loro, e dividendo per x, si otterrà l'equazione di terzo grado

$$y^3 - p\,(X_1 - \frac{p}{2})\, y - \frac{p^2}{2} Y_1 = o$$

e perciò il numero delle normali può essere tre, due, od uno, secondo che le radici di questa equazione sono tutte tre reali, o due reali ripetute, od una soltanto;

Tuttociò si verificherà, come si conosce dall' equazioni di terzo grado, se l'espressione

$$27\,p\,Y_1^2 - 16\,(X_1 - \frac{p}{2})^3$$

sarà negativa, nulla, o positiva, dunque il luogo geometrico dei punti per i quali si possono condurre due normali, avrà per equazione

$$Y_1^2 = \frac{16}{27p}\,(X_1 - \frac{p}{2})^3$$

la quale appartiene ad una curva del terz'ordine, e che suol chiamarsi *parabola cubica*: noi vedremo che questa curva è precisamente l'evoluta della parabola; è facile poi accertarsi che le rette tangenti alla parabola cubica sono normali alla parabola di second'ordine. Per un maggior sviluppo si consulti un articolo del sig. professore Gerono (*).

122.° In un' ellissi coll'origine al centro e riferita ad assi diametrali, si ha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

d'onde per la differenziazione

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0\ ,\qquad y' = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}$$

Ritenendo che A sia l'angolo degli assi, avremo per l'inclinazione φ

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{-\,b^2x\ \text{sen A}}{a^2y - b^2x\cos A}$$

(*) Nouvelles Annales de Mathématiques par M. M. Terquem et Gerono, Avril 1843.

e quindi

$$\frac{\text{sen}\,\varphi}{b^2 x\,\text{sen A}} = \frac{\cos\varphi}{-(a^2 y - b^2 x \cos A)} = \frac{1}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2 - 2a^2 b^2 xy \cos A}}$$

e ponendo

$$h = \frac{\text{sen A}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - 2\frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}\cos A}}$$

si ricaverà

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{hx}{a^2}, \quad \cos\varphi = -\frac{(a^2 y - b^2 x \cos A)\,h}{a^2 b^2 \text{sen A}}$$

Qui pure h rappresenta la perpendicolare abbassata dal centro sulla direzione della tangente. Nell'ipotesi degli assi ortogonali si ha semplicemente

$$\text{tang}\,\varphi = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad \text{sen}\,\varphi = \frac{hx}{a^2}, \quad \cos\varphi = -\frac{hy}{b^2}$$

ed

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

L'equazione della tangente a riduzioni eseguite diviene

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1$$

ed è evidente che a questa si giungerà col sostituire i rettangoli Xx, Yy, ai quadrati x^2, y^2 nell' equazione della curva. Questa retta incontra l'asse delle y, e delle x a distanze espresse per $\frac{b^2}{y}$, ed $\frac{a^2}{x}$. Combinando

poi l'equazioni della curva e della tangente, e fatto per brevità

$$x - \frac{X}{2} = \xi, \qquad y - \frac{Y}{2} = \eta$$

$$\alpha = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}}, \qquad \beta = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}}$$

risulterà

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1$$

la quale appartiene ad una nuova ellissi di semiassi α, e β, ed è atta a risolvere il seguente problema: « da un punto dato (X, Y) fuori dell'ellissi condurre una tangente. L'equazione della retta normale nell'ipotesi degli assi ortogonali, sarà

$$Y_1 - y = \frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}(X_1 - x)$$

ove togliendo il denominatore, e sostituendo per la distanza c del fuoco dal centro

$$c^2 = a^2 - b^2$$

si avrà

$$\frac{X_1}{x\left(\frac{c}{a}\right)^2} - \frac{Y_1}{y\left(\frac{c}{b}\right)^2} = 1$$

Questa retta incontra gli assi delle y, e delle x a certe distanze dall'origine espresse respettivamente per

$$-\left(\frac{c}{b}\right)^2 y, \qquad \left(\frac{c}{a}\right)^2 x$$

Volendo poi conoscere il numero delle normali che da

un punto dato (X_1, Y_1) possono condursi all'ellissi, basterà combinare l'equazione della curva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e dalla normale

$$c^2xy + b^2 Y_1 x - a^2 y X_1 = o$$

in modo da considerare le coordinate x, y come variabili. A tutto questo possiamo facilmente giungerci coll' avvertire in generale che l'equazione dell'ellissi è anche verificata dalla coesistenza delle due equazioni

$$x = a \cos v, \qquad y = b \operatorname{sen} v$$

ove v è un'angolo variabile, e per mezzo di questa nuova sostituzione si giunge spesse volte più rapidamente alla risoluzione di differenti problemi che riguardano l'ellissi; sotto queste condizioni l'equazione della normale diverrà

$$c^2 \operatorname{sen} v \cos v + bY_1 \cos v - aX_1 \operatorname{sen} v = o$$

E' facile poi accertarsi che facendo

$$z = \operatorname{tang} \frac{1}{2} v$$

per cui

$$\operatorname{sen} v = \frac{2z}{1 + z^2}, \qquad \cos v = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$

la precedente equazione si trasformerà in

$$z^4 + 2\,\frac{(aX_1 + c^2)}{bY_1}\,z^3 + 2\,\frac{(aX_1 - c^2)}{bY_1}\,z - 1 = o$$

la quale avendo l' ultimo termine negativo, ammetterà

due radici reali di segni contrari, dunque se la trovata equazione avrà le quattro radici reali, ed ineguali, sarà possibile di condurre quattro normali alla curva; se due di queste radici reali avranno il medesimo valore il numero delle normali si ridurrà a tre, e finalmente se l'equazione avrà due radici immaginarie non si potranno condurre che due normali alla curva. Non potendo noi trattenerci nella discussione delle radici di questa equazione, ci contenteremo di dire che quante volte l'espressione

$$(aX_1)^{\frac{2}{3}} + (bY_1)^{\frac{2}{3}} - (c^2)^{\frac{2}{3}}$$

sia minore di zero od eguale a zero o maggiore di zero, si potranno condurre all'ellissi quattro, tre, o due normali, e perciò l'equazione

$$(aX_1)^{\frac{2}{3}} + (bY_1)^{\frac{2}{3}} - (c^2)^{\frac{2}{3}} = 0$$

sarà il luogo geometrico dei punti dai quali si possono condurre tre normali alla curva, noi vedremo che questa curva è precisamente l'evoluta dell'ellissi: per una completa discussione degli enumerati casi si consultino differenti articoli del sig. prof. Gerono (*).

Se in tutte le precedenti formole, che abbiamo ottenuto per l'ellissi faremo $a = b$, si passerà ad un circolo di raggio a con l'origine al centro, e di equazione

$$x^2 + y^2 = a^2$$

In questo caso

$$h = a\,, \qquad \alpha = \beta = \frac{1}{2}\sqrt{X^2 + Y^2}$$

(*) Nouvelles Annales de Mathématiques Janvier et Avril 1843.

ed allora per l'inclinazione φ, e per l' equazione della tangente, e della normale, avremo

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{x}{a}, \quad \cos\varphi = -\frac{y}{a}$$

$$Xx + Yy = a^2, \qquad X_1y = Y_1x$$

Da questa ultima deduciamo che la retta normale passa per il centro; infine combinata l'equazione della tangente e del circolo, si trova

$$\left(x - \frac{X}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{Y}{2}\right)^2 = \frac{X^2 + Y^2}{4}$$

la quale appartiene ad un nuovo circolo, ed i punti d'intersezione con il dato determineranno due punti di contatto; la precedente costruzione coincide con quanto s'insegna nella geometria elementare.

123.° In una iperbola con l'origine al centro, e riferita ad assi diametrali, l'equazione è della forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

quindi per una differenziazione, e derivazione

$$\frac{xdx}{a^2} - \frac{ydy}{b^2} = 0, \qquad y' = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}$$

Con questo valore di y' troviamo per l'inclinazione φ

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{b^2x\,\text{sen}\,A}{a^2y + b^2x\cos A}$$

dalla quale secondo il consueto si ottiene

$$\frac{\text{sen}\,\varphi}{b^2x\,\text{sen}\,A} = \frac{\cos\varphi}{a^2y + b^2x\cos A} = \frac{1}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2 + 2a^2b^2xy\cos A}}$$

Qui pure ponendo

$$h = \frac{\text{sen A}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + 2\frac{x}{a^2}\frac{y}{b^2}\cos A}}$$

ricaveremo

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{hx}{a^2}, \quad \cos\varphi = \frac{(a^2y + b^2x\cos A)h}{a^2 b^2 \,\text{sen A}}$$

Quando gli assi sono ortogonali, si trova

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad \text{sen}\,\varphi = \frac{hx}{a^2}, \quad \cos\varphi = \frac{hy}{b^2}$$

la perpendicolare

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

è dell'identica forma di quella di già trovata per l'ellissi. L'equazione della tangente è

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$$

ciò che indica un passaggio dall'equazione della curva a quella della tangente col sostituire i rettangoli ai quadrati. Questa retta incontra gli assi delle y, e delle x alle distanze

$$-\frac{b^2}{y}, \qquad \text{ed} \qquad \frac{a^2}{x}$$

Combinando in ultimo l'equazione della curva, e della

tangente, e fatto per brevità

$$x-\frac{X}{2}=\xi\ ,\qquad y-\frac{Y}{2}=\eta$$

$$\alpha=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}}\ ,\qquad \beta=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}}$$

si ricava

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}=1$$

la quale appartiene ad un'altra iperbola di semiassi diametrali α, β, e dalla intersezione della medesima con la data si determineranno i punti di contatto; le coordinate X, Y del punto esterno sono date, dal quale dee condursi la tangente. Nell'ipotesi degli assi ortogonali, l'equazione della normale al punto (x, y) sarà

$$Y_1-y=-\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}\,(X_1-x)$$

Togliendo i denominatori, ed introducendovi la distanza c di uno dei fochi dal centro, risulterà $c^2=a^2+b^2$, ed insieme

$$\frac{X_1}{x\left(\frac{c}{a}\right)^2}+\frac{Y_1}{y\left(\frac{c}{b}\right)^2}=1$$

La retta in questione incontra l'asse delle y ad una distanza $y\left(\frac{c}{b}\right)^2$ dall'origine, e l'asse delle x, ad una distanza $x\left(\frac{c}{a}\right)^2$ dalla medesima origine. Qui pure come già abbiamo fatto per l'ellissi potremo riconoscere il nu-

mero delle normali che da un punto dato (X_1, Y_1) possono condursi all'iperbola. Infatti riprendendo l'equazione della curva

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e dalla normale

$$c^2xy - a^2 X_1 y - b^2 Y_1 x = 0$$

osserveremo che la prima di queste vien anche verificata dal sistema delle due

$$x = a \sec v, \quad y = b \tang v$$

per cui l'equazione della normale per questa nuova sostituzione diverrà

$$c^2 \sen v - bY_1 \cos v - aX_1 \sen v \cos v = 0$$

nella quale facendo

$$z = \tang \frac{1}{2} v$$

otterremo l'equazione di quarto grado

$$z^4 + 2 \frac{(aX_1 + c^2)}{bY_1} z^3 + 2 \frac{(c^2 - aX_1)}{bY_1} z - 1 = 0$$

con l'ultimo termine negativo, e perciò per lo meno due normali si potranno condurre all'iperbola da un particolar sistema di punti. Se le coordinate X_1, Y_1, sono vincolate dall'equazione

$$(aX_1)^{\frac{2}{3}} - (bY_1)^{\frac{2}{3}} = (c^2)^{\frac{2}{3}}$$

noi potremo condurre tre normali all'iperbola, che se

l'espressione

$$(aX)^{\frac{2}{3}} - (bY)^{\frac{2}{3}} - (c^2)^{\frac{2}{3}}$$

sia $>$, o $<$o il numero delle normali sarà quattro, o due. Qui anche l'equazione fra X_1 ed Y_1 rappresenterà l'evoluta dell'iperbola. Per un maggior dettaglio si consulti la citata Memoria del sig. prof. Gerono.

124.° Passando all'esame di una qualche curva trascendente, sceglieremo primieramente una logaritmica di equazione

$$y = a \log x$$

Differenziando nella supposizione dei logaritmi iperbolici, abbiamo

$$dy = \frac{a\,dx}{x}\ ,\quad y' = \text{tang}\,\varphi = \frac{a}{x}$$

d'onde

$$\frac{\text{sen}\,\varphi}{a} = \frac{\cos\varphi}{x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

e perciò

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\ ,\qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

L'equazione della tangente sarà

$$Y - y = \frac{a}{x}\,(X - x)$$

ovvero

$$x\,(Y + a - y) = aX$$

Se supponiamo variabili le x, y, e costanti le X, Y, allora rappresenterà un'iperbola equilatera fra gli assin-

toti, uno dei quali è l' asse delle x, e l'altro ha per equazione

$$Y + a - y = o \,, \qquad \text{od} \qquad y = a + Y$$

Nello stesso modo l'equazione alla normale nel sistema delle coordinate ortogonali sarà

$$Y_1 - y = -\frac{x}{a}(X_1 - x)$$

ovvero

$$x(X_1 - x) + a(Y_1 - y) = o$$

Qui pure considerando variabili le x, y quest' ultima equazione rappresenterà una parabola con l'asse parallelo a quello delle y. Descrivendo pertanto l' iperbola equilatera fra gli assintoti, e la parabola delle indicate dimensioni si otterrà la costruzion geometrica da eseguirsi per condurre da un punto (X, Y), o da un punto (X_1, Y_1) una tangente, e normale alla curva logaritmica.

125.° Per una cicloide con l'origine al vertice superiore del diametro $2a$ del circolo generatore, le ascisse x computate sopra questo diametro, e le ordinate sopra una retta perpendicolare, verificheranno le due equazioni

$$x = a(1 - \cos u) \,, \qquad y = a(u + \operatorname{sen} u)$$

u indica per una semicicloide un angolo variabile compreso fra o, e 180°, e rappresenta l'angolo che il raggio condotto dal centro al punto ove l'ordinata incontra la semicirconferenza, forma con l'asse delle ascisse. Onde ottenere l'equazione fra le coordinate ortogonali x, y, basterà avvertire, che dalla x si ha

$$a \operatorname{sen} u = \sqrt{2ax - x^2}$$

quindi

$$y = \sqrt{2ax - x^2} + a \text{ arc sen } \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}$$

Differenziando adesso i valori di x, y in funzione dell'angolo u, sarà

$$dx = a \text{ sen } u \, du , \qquad dy = adu (1 + \cos u) \, du$$

Dividendo la seconda per la prima, otterremo per l'inclinazione φ della cicloide all'asse delle ascisse

$$\text{tang } \varphi = \frac{1 + \cos u}{\text{sen } u} = \cot \frac{1}{2} u$$

e per conseguenza

$$\varphi = 90 - \frac{1}{2} u$$

Di qui deduciamo che la tangente in un punto qualunque della cicloide è sempre parallela alla corrispondente corda del circolo. Sia infatti φ_1 l'angolo che questa contiene con l'asse della ascissa, si avrà

$$2\varphi_1 + u = 180 , \qquad \text{e quindi} \qquad \varphi_1 = 90 - \frac{1}{2} u = \varphi$$

Questa proprietà rende assai facile il condurre la tangente in un punto qualunque della curva. Eliminando poi sen u, cos u nei valori di dx, dy, risulterà l'equazione differenziale della curva

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}} , \qquad dy = dx \sqrt{\frac{2a - x}{x}}$$

Dalla sola inspezione della quantità

$$\sqrt{\frac{2a - x}{x}} = \sqrt{\frac{2ax - x^2}{x^2}}$$

si vede che d'essa rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo formato con l'asse della x dalla corda del circolo condotta dall'origine al punto (x, y) della curva. Alla medesima equazione differenziale saremmo giunti differenziando direttamente il valore della y in funzione della x. Quando l'origine delle coordinate si stabilisca all'estremo della base della cicloide, allora denotando per π il rapporto della circonferenza al diametro; fra le nuove coordinate x', y', e le antiche x, y dovrà sussistere

$$x' = a\pi - y, \qquad y' = 2a - x$$

d'onde

$$dy = -dx', \qquad dx = -dy'$$

Con questi valori l'equazione differenziale della cicloide si trasformerà, col togliere gli apici, in

$$dx = dy \sqrt{\frac{y}{2a - y}}$$

L'equazioni finite, ed i valori di x, y danno egualmente

$$2a - y' = a(1 - \cos u), \quad a\pi - x' = a(u + \operatorname{sen} u)$$

e ponendo

$$u' = \pi - u$$

si avrà col togliere gli apici

$$x = a(u - \operatorname{sen} u), \qquad y = a(1 - \cos u)$$

Differenziando queste espressioni deduciamo

$$dx = a(1 - \cos u)\, du, \qquad dy = a \operatorname{sen} u\, du$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 - \cos u} = \cot \frac{1}{2} u$$

Nelle diverse questioni che si risolveranno sulla cicloide faremo indistintamente uso di una qualunque delle equazioni stabilite. Così prendendo l'equazione differenziale

$$dy \sqrt{x} = dx \sqrt{2a - x}.$$

l'equazioni delle rette tangente, e normale condotte al punto (x, y) della curva, saranno

$$(Y - y) \sqrt{x} = (X - x) \sqrt{2a - x}$$

$$(Y_1 - y) \sqrt{2a - x} = -(X_1 - x) \sqrt{x}$$

ovvero

$$(Y - y)^2 x = (X - x)^2 (2a - x)$$

$$(Y_1 - y) (2a - x) = (X_1 - x)^2 x$$

Ambedue l'equazioni rappresentano due curve del terzo ordine, qualora si considerino variabili le x, y. Queste due curve tagliano la cicloide in tutti i punti, ove è incontrata dalle tangenti o normali che potremo supporre concorrere ad un punto medesimo (r, y).

126.° Prendiamo una spirale logaritmica a coordinate ortogonali, e di equazione

$$\text{arc tang} \frac{x}{y} = a \log \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}$$

avremo dalla differenziazione e riduzione

$$x\, dy - y\, dx = a (x\, dx + y\, dy)$$

d'onde

$$(x - ay)\, dy - (y + ax)\, dx = o$$

$$\text{tang}\, \varphi = y' = \frac{y + ax}{x - ay}$$

e perciò

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{y+ax}=\frac{\cos\varphi}{x-ay}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{x^2+y^2}}$$

ovvero

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{y+ax}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos\varphi=\frac{x-ay}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{x^2+y^2}}$$

Tali sono le differenti formole, con le quali si determina il valore dell'inclinazione φ della spirale logaritmica rapporto all'asse delle x. In ultimo l'equazioni della tangente, e della normale sono

$$(x-ay)(Y-y)-(y+ax)(X-x)=0$$

$$(y+ax)(Y_1-y)+(x-ay)(X_1-x)=0$$

dalle quali si ritiene

$$a(x^2+y^2)+x(Y-aX)-y(X+aY)=0$$

$$x^2+y^2+x(aY_1-X_1)+y(aX_1-Y_1)=0$$

Quando si suppongano variabili le x, y allora queste due equazioni rappresentano due circoli, quali passano per l'origine delle coordinate, ed i loro raggi sono evidentemente le due rette espresse per

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{2a}.\sqrt{X^2+Y^2},\quad \frac{\sqrt{1+a^2}}{2}.\sqrt{X_1^2+Y_1^2}$$

Che se inoltre si prenda $X_1=X$, $Y_1=Y$ i due circoli avranno per corda comune la retta condotta dall'origine al punto (X, Y). In questo modo avremo ottenuto un facil metodo per costruire la tangente, e la normale nella spirale logaritmica.

Per un maggior numero di applicazioni proporremo alcune altre curve, determinate da equazioni algebriche, ed anche trascendenti. Così scegliendo le curve algebriche di equazioni

$$y^4 + 2(a^2 + x^2)y^2 + (a^2 - x^2)^2 = b^4$$

$$(x^2 + y^2)^2 = k^2(x^2 - y^2),$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}, \qquad y = \frac{b + x}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$$

la prima rappresenta la curva ovale del *Cassini*, la seconda la lemniscata di *Giacomo Bernoulli*, e che trovasi compresa in quella del Cassini per la supposizione di $b = a = \frac{k}{\sqrt{2}}$, la terza dicesi la *Cissoide* di *Diocle*, e la quarta la *Concoide* di *Nicomede*. Per curve trascendenti ci limiteremo alle due

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad y = \frac{x}{\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}}$$

la prima di queste appartiene alla *Catenaria*, e la seconda alla *Quadratrice* di *Dinostrato*. Noi dalle differenti applicazioni del Calcolo differenziale alla geometria verremo a conoscere delle proprietà importanti di queste curve.

Determinazione delle quattro rette, tangente, suttangente, normale, sunnormale, e di alcune altre rette per ogni curva piana.

127.° Per i differenti punti di una curva piana qualunque si trovano quattro rette, per mezzo delle quali si scuoprono diverse proprietà importanti, o caratteristiche delle curve stesse, e che dai geometri sono nominate, *tangente*, *suttangente*, *normale*, e *sunnormale*. La *tangente* computata sulla direzione della retta toccante la curva in un dato punto, si estende dal punto di contatto fino all' incontro dell' asse delle ascisse. La *suttangente* presa sull'asse delle ascisse dicesi la lunghezza della retta, dal piede dell'ordinata fino all' estremo incontro della tangente. La *normale* è la retta elevata perpendicolarmente alla tangente dal punto di contatto fino all'incontro dell'asse delle ascisse. La *sunnormale* poi sarà la retta compresa dal piede dell'ordinata fino all'estremo della normale, e computata sull'asse delle ascisse.

Stabilite queste definizioni, è facile il vedere che chiamando t la *tangente*, t_1 la *suttangente*, n la *normale*, n_1 la *sunnormale*, e ritenendo per φ l'inclinazione della curva rapporto all'asse delle ascisse ed A l'angolo degli assi risulterà dal triangolo di lati, t, t_1, y

$$\frac{t}{\operatorname{sen} A} = \frac{t_1}{\operatorname{sen}(A-\varphi)} = \frac{y}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Nello stesso modo nel triangolo di lati, n, n_1, y si avrà

$$\frac{n}{\operatorname{sen} A} = \frac{n_1}{\cos(A-\varphi)} = \frac{y}{\cos\varphi}$$

quindi si otterranno i valori delle quattro rette dimandate

$$t = \frac{y \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} \varphi}, \quad t_1 = \frac{y \operatorname{sen} (A - \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi}$$

$$n = \frac{y \operatorname{sen} A}{\cos \varphi}, \quad n_1 = \frac{y \cos (A - \varphi)}{\cos \varphi}$$

Nell'ipotesi degli assi ortogonali si riducono ad

$$t = y \operatorname{cosec} \varphi, \ t_1 = y \cot \varphi, \ n = y \sec \varphi, \ n_1 = y \operatorname{tang} \varphi$$

Ora qualunque di queste espressioni si usi il calcolo differenziale somministra un metodo facile di eliminare l'angolo φ, ed introdurre i differenziali dx, dy, ds; qual cosa è di somma utilità per le applicazioni.

Riprendendo infatti come al parag. 112, ed al parag. 114, le note formole differenziali

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} (A - \varphi)} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\operatorname{sen} \varphi}{dy \operatorname{sen} A} = \frac{\cos \varphi}{dx + dy \cos A} = \frac{1}{ds}$$

si avrà dallo sviluppo di $\cos (A - \varphi)$, e dalla sostituzione dei valori

$$t = \frac{y\, ds}{dy}, \quad t_1 = \frac{y\, dx}{dy}, \quad n = \frac{y\, ds \operatorname{sen} A}{dx + dy \cos A}$$

$$n_1 = \frac{y\,(dy + dx \cos A)}{dx + dy \cos A}$$

La tangente, e suttangente riterranno la medesima forma per l'indipendenza dell'angolo A in qualunque sistema di coordinate rettilinee; quindi supposti gli assi

ortogonali le medesime quattro rette avranno per espressioni

$$t = \frac{y\,ds}{dy}\,, \quad t_1 = \frac{y\,dx}{dy}\,, \quad n = \frac{y\,ds}{dx}\,; \quad n_1 = \frac{y\,dy}{dx}$$

Tutte le precedenti formole sono più commode nelle applicazioni, quando ai differenziali si sostituiscano le derivate, in modo che ponendo

$$\frac{dy}{dx} = y'\,, \quad \frac{ds}{dx} = (1 + y'^2 + 2y' \cos A)^{\frac{1}{2}}$$

diverranno le medesime

$$t = \frac{y}{y'}(1 + y'^2 + 2y' \cos A)^{\frac{1}{2}}\,, \quad t_1 = \frac{y}{y_1}$$

$$n = \frac{y(1 + y'^2 + 2y' \cos A)^{\frac{1}{2}}}{1 + y' \cos A}\,, \quad n_1 = \frac{y(y' + \cos A)}{1 + y' \cos A}$$

quali per $A = 90^\circ$ si riducono ad

$$t = \frac{y}{y'}(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\,, \quad t_1 = \frac{y}{y'}$$

$$n = y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\,, \quad n_1 = yy'.$$

Sotto questa ultima forma verranno per lo più adoprate nei differenti casi particolari.

128.° A queste quattro rette si possono aggiungere le perpendicolari abbassate da un dato punto (m, m') sulla direzione delle rette *tangente*, e *normale*. A questo oggetto osserveremo che se

$$Y = aX + b$$

rappresenti l'equazione di una retta a coordinate oblique

di angolo A, la grandezza q della perpendicolare abbassata da un dato punto (m, m') sulla direzione della medesima retta, sarà

$$q = \pm \frac{(m' - am - b) \operatorname{sen} A}{\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos A}}$$

Quando la retta in proposito si riduca alla tangente di equazione

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

si verifica

$$a = \frac{dy}{dx}, \quad b = \frac{ydx - xdy}{dx}$$

d'onde

$$q = \pm \frac{[(m' - y)\, dx - (m - x)\, dy] \operatorname{sen} A}{ds}$$

Sostituendo le derivate al rapporto dei differenziali, diverrà

$$q = \pm \frac{[m' - y - y'(m - x)] \operatorname{sen} A}{(1 + y'^2 + 2y' \cos A)^{\frac{1}{2}}}$$

Nello stesso modo per ottenere il valore della perpendicolare q_1 abbassata dallo stesso punto (m, m') sopra la direzione della retta normale di equazione

$$Y_1 - y = -\frac{(dx + dy \cos A)}{dy + dx \cos A}(X_1 - x)$$

basterà prendere

$$a = -\frac{(dx + dy \cos A)}{dy + dx \cos A}, \quad b = y + x\frac{(dx + dy \cos A)}{dy + dx \cos A}$$

quindi fatta la sostituzione nella formola generale si avrà

$$q_1 = \pm \frac{(m - x + (m' - y)\cos A)\, dx + (m' - y + (m - x)\cos A) dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A}}$$

Volendo poi sostituire y' in vece del rapporto dei differenziali dx, dy, otterremo

$$q_1 = \pm \frac{(m - x + (m' - y) \cos A) + (m' - y + (m - x) \cos A) y'}{(1 + y'^2 + 2y' \cos A)^{\frac{1}{2}}}$$

Supponiamo adesso che il punto dato (m, m') si trovi sull'asse delle ascisse, sarà $m' = o$, e le perpendicolari q, q_1 divengono

$$q = \pm \frac{((x - m) y' - y) \operatorname{sen} A}{(1 + y'^2 + 2y' \cos A)^{\frac{1}{2}}}$$

$$q_1 = \pm \frac{(m - x - y \cos A) + ((m - x) \cos A - y) y'}{(1 + y'^2 + 2y' \cos A)^{\frac{1}{2}}}$$

Infine supponendo ancora $m = o$, le q, q_1 si ridurranno alle perpendicolari h, h_1 abbassate dall'origine delle coordinate sopra la direzione della tangente, e della normale, e si ricaverà dai primi valori di q, q_1

$$h = \pm \frac{(x dy - y dx) \operatorname{sen} A}{ds}, \quad h_1 = \frac{r\, dr}{ds}$$

ove per la distanza r si è posto

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos A$$

Nel caso degli assi ortogonali, i valori generici di q, q_1

e di h, h_1 saranno

$$q = \pm \frac{(m' - y)\,dx - (m - x)\,dy}{ds}$$

$$q_1 = \pm \frac{(m - x)\,dx + (m' - y)\,dy}{ds}$$

$$h = \pm \frac{(xdy - ydx)}{ds}, \quad h_1 = \frac{r\,d\,r}{ds}$$

e che per la nuova sostituzione della derivata y' diverranno

$$q = \pm \frac{(m' - y) - (m - x)\,y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad h = \pm \frac{(xy' - y)}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$q_1 = \pm \frac{(m - x) + (m' - y)\,y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad h_1 = \frac{x + yy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

In appresso mostreremo differenti applicazioni di queste formole alle linee del secondo ordine.

129.° A complemento dell'esposte teorie verremo brevemente ad indicare, come dall'equazioni della tangente, e della normale possano dedursi i valori delle quattro rette cognite t, t_1, n, n_1.

Riprese infatti l'equazione della tangente

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}$$

e chiamata R la distanza fra il punto dato $(x.y)$, ed il punto qualunque (X, y), della retta, sarà

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{X - y}{dy} = \pm \frac{\left((X - x)^2 + (Y - y)^2 + 2(X - x)(Y - y)\cos A\right)^{\frac{1}{2}}}{(dx^2 + dy^2 + 2dx\,dy\cos A)^{\frac{1}{2}}} = \frac{R}{ds}$$

Ora dalla medesima si trova

$$\frac{(X-x)}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{(X-x+(Y-y)\cos A)dx+(Y-y+(X-x)\cos A)dy}{dx^2+dy^2+2dx\,dy\cos A}$$

dunque

$$(X-x)(dx+dy\cos A)+(Y-y)(dy+dx\cos A)=Rds$$

I valori della suttangente, e della tangente si ottengono evidentemente dai punti d' incontro della retta R con l'asse delle ascisse, cosicchè fatto Y = o, avremo

$$\frac{X-x}{dx}=-\frac{y}{dy}$$

$$(X-x)(dx+dy\cos A)-y(dy+dx\cos A)=Rds$$

In queste nuove espressioni la differenza $X-x$ sarà la suttangente, e la distanza R la tangente, quindi eliminando $X-x$, ed osservando che X, ed x, sono di segno contrario, risulterà infine

$$X-x=\frac{y\,dx}{dy}, \qquad R=\frac{y\,ds}{dy}$$

Con la stessa facilità, ripresa l'equazione della normale

$$\frac{X_1-x}{dy+dx\cos A}=\frac{Y_1-y}{-(dx+dy\cos A)}$$

e chiamata R_1 la distanza fra i due punti (x, y), (X_1, Y_1) avremo

$$\frac{X_1-x}{dy+dx\cos A}=\frac{Y_1-y}{-(dx+dy\cos A)}=\frac{R_1}{\operatorname{sen} A\,ds}$$

ed anche

$$\frac{X_1-x}{dy+dx\cos A}=\frac{Y_1-y}{-(dx+dy\cos A)}=\frac{(X_1-x)\,dy-(Y_1-y)\,dx}{dx^2+dy^2+2dx\,dy\cos A}$$

e perciò

$$\frac{[(X_1 - x)\, dy - (Y_1 - y)\, dx]}{ds} \text{sen A} = R_1 \ .$$

Qui pure $Y_1 = o$ ridurrà le due rette $X_1 - x$, ed R_1 ai valori della sunnormale, e normale, in modo che dopo l'eliminazione, e riduzioni si troverà con facilità

$$X_1 - x = y\,\frac{(dy + dx \cos A)}{dx + dy \cos A}\,, \quad R_1 = \frac{yds \text{ sen A}}{dx + dy \cos A}$$

come già eravamo giunti per altre considerazioni.

Avanti di mostrare le particolari applicazioni alle tre curve del second'ordine noi osserveremo, che calcolando il valore

$$h = \pm \frac{(xdy - ydx) \text{ sen A}}{ds}$$

della perpendicolare h abbassata dall'origine delle coordinate sopra la direzione di una tangente ad una linea di secondo ordine determinata da una equazione generale come si è fatto nel parag. 118, noi otterremo un' espressione identica a quella di già notata per la lettera h nel medesimo parag. 118, in questa guisa rimane dimostrata che la quantità h calcolata nei parag. 118 e seguenti per le linee del second'ordine rappresenta l'indicata perpendicolare.

130.° Consideriamo una parabola riferita ad assi diametrali, e di equazione

$$y^2 = px$$

si avrà

$$2y\, dy = pdx\,, \qquad y' = \frac{p}{2y}\,, \quad 1 + y'^2 = \frac{4px + p^2}{4y^2}$$

Quindi se gli assi sono ortogonali, otterremo per i valori delle quattro rette più volte nominate, e determinate dalle ultime formole del parag. 127

$$t = 2\sqrt{\frac{x(4x+p)}{4}}\,, \quad n = \sqrt{\frac{p(4x+p)}{4}}$$

$$t_1 = 2x\,, \quad n_1 = \frac{p}{2}$$

Ed osservando che il raggio vettore r condotto dal fuoco della curva ad un punto (x, y) si esprime per

$$r = x + \frac{1}{4}p$$

risulterà più semplicemente

$$t_1 = 2x, \quad n_1 = \frac{p}{2} \quad t = 2\sqrt{rx}\,, \quad n = \sqrt{pr}$$

Di qui deduciamo, che nella parabola, la suttangente è sempre doppia dell'ascissa, che la sunnormale è costante ed eguale alla metà del parametro, che la tangente è media, proporzionale, geometrica fra la suttangente, ed il doppio del raggio vettore, infine la normale è media, proporzionale, geometrica fra il parametro ed il raggio vettore. Si conducano ora dall'origine delle coordinate, e dal fuoco due rette h, q perpendicolari sulla direzione della tangente, sarà per le coordinate (m, m') dell'estremità di q

$$m' = 0\,, \quad m = \frac{1}{4}p$$

e per conseguenza le penultime formole del parag. 128 divengono

$$h = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{p}{r}}\,, \quad q = \frac{\sqrt{pr}}{2} = \frac{n}{2}\,, \text{ od } n = 2q$$

Non sarà inutile qui di ritrovare un' altra espressione della normale n, facendo una combinazione delle due

$$n^2 = pr\,, \qquad n = 2q$$

Infatti dividendo la prima per la seconda avremo

$$n = \frac{pr}{2q}$$

Noi mostreremo che questa espressione è commune alle tre curve coniche.

131.° In un'ellissi con l'origine al centro e di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si ha dalla differenziazione, e derivazione

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0\,, \quad y' = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}$$

ed insieme

$$1 + y'^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^2y^2} = \frac{b^2\,(a^4 - x^2(a^2 - b^2))}{a^2\,y^2}$$

quindi se gli assi sono ortogonali, avremo come dalle nominate ultime formole del parag. 127

$$t_1 = -\left(\frac{a^2}{x} - x\right), \qquad n_1 = -\frac{b^2}{a^2}\,x$$

$$t = -\frac{y}{bx}\sqrt{a^4 - c^2\,x^2}\,, \quad n = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - c^2\,x^2}$$

ove la quantità c determinata dalla formola

$$c^2 = a^2 - b^2$$

rappresenta la distanza del fuoco dal centro; facciamo inoltre

$$\frac{c}{a}=e, \qquad \text{ovvero} \qquad c=ae$$

e prendiamo il valore assoluto di t_1, n_1, t si ricaverà

$$t_1=\frac{a^2}{x}-x, \qquad n_1=\frac{b^2}{a^2}x$$

$$t=\frac{1}{x}\sqrt{(a+x)(a-x)(a+ex)(a-ex)}, \quad n=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}$$

Di qui deduciamo che nell'ellissi, il valore della suttangente è indipendente dal semiasse minore; che il rapporto fra la sunnormale e l'ascissa è costante; ed infine dal valore dell'ordinata y si passa al valore della normale col sostituire ex in vece della x, nell'equazione della curva: aggiungiamo che se r, r' sieno i due raggi vettori condotti dai due fuochi al punto (x, y) si ha

$$r=a-ex, \qquad r'=a+ex, \qquad r+r'=2a$$

ed insieme

$$rr'=2ar-r^2=a^2-e^2x^2$$

d'onde la tangente e la normale porgerà

$$t=\frac{y}{x}\frac{a}{b}\sqrt{2ar-r^2}, \qquad n=\frac{b}{a}\sqrt{2ar-r^2}$$

Riguardo a questa nuova espressione della normale osserveremo, che riferendo i punti della curva ad uno dei vertici dell'asse maggiore, abbiamo per equazione della curva

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$$

Ora dal valore di y si passerà al valore della n, quando si muti l'ascissa x nel raggio vettore r più prossimo.

Chiamando secondo il consueto h la perpendicolare abbassata dall'origine, che coinciderà con il centro della curva, sulla direzione della tangente, e q una perpendicolare simile condotta dal fuoco, si avrà per le coordinate del fuoco

$$m' = o\,, \quad m = \sqrt{a^2 - b^2} = c$$

d'onde le penultime formole del parag. 128 daranno

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}\,, \quad q = \frac{(a^2 - cx)\,h}{a^2}$$

Eliminando la y^2 per mezzo dell'equazione della curva, potremo introdurci il valore della normale n e del raggio vettore r in modo da essere

$$h = \frac{b^2}{n}\,, \quad q = \frac{b^2 r}{an}$$

Ora per il parametro p della curva si ha

$$p = \frac{2b^2}{a^2}$$

e perciò

$$q = \frac{hr}{a}\,, \qquad n = \frac{pr}{2q}$$

Quest'ultima espressione della normale è comune con la parabola.

Da un ellissi si passa al circolo col supporre

$$b = a\,, \qquad c = o$$

e per conseguenza nel circolo di equazione

$$x^2 + y^2 = a^2$$

le quattro suindicate rette porgeranno

$$t_1 = \frac{a^2}{x} - x = \frac{y^2}{x}, \; n_1 = x, \; t = \frac{ay}{x}, \quad n = a$$

Cioè l' ordinata è media proporzionale geometrica fra l'ascissa, e la suttangente, la quale è comune con l'ellissi di semiasse maggiore a; la sunnormale è eguale all' ascissa computa dal centro; il rapporto fra la tangente, ed il raggio è eguale al rapporto fra l'ordinata e l'ascissa; finalmente la normale è eguale al raggio come già si conosce dalla geometria elementare.

132.° In una iperbola di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si ha evidentemente

$$\frac{xdx}{a^2} - \frac{ydy}{b^2} = 0, \quad y' = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

e quindi

$$1 + y'^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{((a^2 + b^2)x^2 - a^4)\, b^2}{a^4\, y^2}$$

Nell'iperbola la distanza c del fuoco dal centro si esprime per

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e perciò otterremo con facilità

$$t_1 = \frac{a^2}{x} + x, \qquad n_1 = \frac{b^2}{a^2}\, x$$

$$t = \frac{y}{bx}\sqrt{c^2\, x^2 - a^4}, \qquad n = \frac{b}{a^2}\sqrt{c^2\, x^2 - a^4}$$

Qui anche ponendo

$$\frac{c}{a} = e, \qquad \text{ovvero} \qquad c = ae$$

la tangente, e normale daranno

$$t = \frac{a}{b}\,\frac{y}{x}\sqrt{e^2 x^2 - a^2}, \qquad n = \frac{b}{a}\sqrt{e^2x^2 - a^2}$$

Da questa espressione della normale si vede, che dal valore dell'ordinata y si passerà al valore di n col sostituire ex invece della x nell'equazione della curva. I raggi vettori condotti dai due fuochi al punto (x, y) dell'iperbola sono determinati dall'equazioni

$$r = ex - a, \qquad r' = ex + a, \qquad r' - r = 2a$$

d'onde

$$t = \frac{y}{x}\,\frac{a}{b}\sqrt{2ar + r^2}, \qquad n = \frac{b}{a}\sqrt{2ar + r^2}$$

Se in questa nuova espressione di n si sostituisca x invece di r, allora il primo membro diviene eguale all'ordinata y; l'origine delle coordinate dovrà esser preso in uno dei vertici dell'asse maggiore, onde sussista

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax + x^2}$$

Per brevità tralascieremo l'enunciato delle proprietà dell'iperbola, le quali provengono dalla suttangente, e sunnormale, e che sono simili a quelle di già enunciate per l'ellissi.

Ritenendo che h, e q sieno le perpendicolari abbas-

sate dal centro della curva, e dal fuoco, sulla direzione della tangente si trova

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}, \quad q = \frac{(cx - a^2)\, h}{a^2}$$

Eliminando la y^2 per mezzo dell'equazione della curva, e formandone un paragone con il raggio vettore r, e la normale n si avrà

$$h = \frac{b^2}{n}, \quad q = \frac{b^2 r}{an}$$

Infine per il parametro

$$p = \frac{2b^2}{a}$$

deduciamo

$$q = \frac{hr}{a}, \qquad n = \frac{pr}{2q}$$

Ognun vede che il nuovo valore della normale n è comune a tutte tre le linee del second'ordine; la lunghezza della normale si ridurrà alla metà del parametro nel vertice della parabola, e nei vertici dell'asse maggiore dell'ellissi e dell'iperbola, nei quali tre punti si verifica evidentemente $r = q$.

133.° Nel passare alle curve trascendenti sceglieremo primieramente una cicloide con l'origine al vertice della base, e come si è già provato al parag. 125, la sua equazione differenziale sarà

$$dx = dy \sqrt{\frac{y}{2a - y}}, \quad y' = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}$$

quindi

$$t = y\sqrt{\frac{2a}{2a - y}}, \qquad t_1 = y\sqrt{\frac{y}{2a - y}}$$

$$n = \sqrt{2ay}, \qquad n_1 = \sqrt{2ay - y^2}$$

Dalle trovate espressioni della normale, e sunnormale della Cicloide concluderemo che in questa curva, la normale è sempre eguale alla corrispondente corda del circolo generatore; che la sunnormale eguaglia la rispettiva ordinata del circolo, ove corrispondono i segmenti y, $2a - y$ del diametro. Riguardo poi ai valori di tutte le quattro rette non sarà inutile di avvertire, che per la sostituzione della

$$y = a\,(1 - \cos u)$$

si trasformeranno in

$$t = 2a \operatorname{sen} \frac{1}{2} u \operatorname{tang} \frac{1}{2} u\,, \quad t_1 = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} u \operatorname{tang} \frac{1}{2} u$$

$$n = 2a \operatorname{sen} \frac{1}{2} u\,, \quad n_1 = a \operatorname{sen} u$$

Per ultimo osserveremo che la suttangente t_1, la normale n e la sunnormale n_1 della cicloide rappresentano ancora respettivamente l'ordinata di una *Cissoide* di Diocle, di una parabola, e di un circolo.

134.° Nella una curva logaritmica di equazione

$$y = e^{\frac{x}{a}}$$

abbiamo dalla differenziazione

$$dy = \frac{e^{\frac{x}{a}}\,dx}{a}\,, \qquad y' = \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a} = \frac{y}{a}$$

e per conseguenza

$$t = \left(a^2 + e^{\frac{2x}{a}}\right)^{\frac{1}{2}}\ ,\quad t_1 = a$$

$$n = \frac{y}{a}\left(a^2 + e^{\frac{2x}{a}}\right)^{\frac{1}{2}}\ ,\quad n_1 = \frac{e^{\frac{2x}{a}}}{a}$$

Di qui ne segue che nella curva logaritmica la suttangente è costante, ed eguale al parametro a.

Nella Catenaria di equazione

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

si ha

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

e perciò

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a}$$

dunque per le quattro rette t, t_1, n, n_1 avremo

$$t = \frac{2y^2}{a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)}\ ,\quad t_1 = \frac{2y}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}$$

$$n = \frac{y^2}{a}\ ,\quad n_1 = \frac{y}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Osservando poi che per l'arco s di questa curva a par-

tir da $x=o$ potremo prendere

$$s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

per cui i valori delle quattro rette in proposito divengono

$$t=\frac{y^2}{s}\ ,\quad t_1=\frac{ay}{s}\ ,\quad n=\frac{y^2}{a}\ ,\quad n_1=\frac{ys}{a}$$

Con queste espressioni sarà facile formare l'enunciate di alcune proprietà della Catenaria, e che per brevità ci dispensiamo di fare.

Assintoti, Ordinate Massime e Minime, Concavità, e Convessità, punti singolari delle curve piane.

135.° Per *assintoto* di una curva s'intende una linea retta o curva, e di tal natura che per i punti infinitamente lontani, la distanza delle due curve misurata parallelamente ad una costante direzione divenga minore di qualunque data quantità. Di qui ne segue che una linea sarà assintoto di un'altra se per valori infinitamente grandi dell'ascissa, la differenza delle ordinate divenga infinitesima, od anche se la differenza delle ascisse divenga infinitesima per valori infinitamente grandi delle ordinate. Quando l'*assintoto* di una curva sia rettilineo, allora si riduce evidentemente ad una retta, alla quale questa curva si accosta indefinitamente senza poterla mai raggiungere. Supponendo la curva piana rappresentata da un' equazione fra le due coordinate x, y ortogonali, od

oblique, ci fermeremo sulla ricerca degli assintoti rettilinei non paralleli all' asse delle y: questa ricerca si potrà ridurre alla coesistenza delle ordinate della curva, e dell'assintoto per $x = \infty$. Sia infatti

$$y = \alpha x + \beta$$

l'equazione di uno degli assintoti non paralleli all' asse delle y, l'ordinata della curva corrispondente ad una medesima ascissa x per valori grandissimi della medesima si ridurrà sensibilmente all'ordinata dell'assintoto, in modo da poter avere

$$y = \alpha x + \beta \pm \varepsilon$$

Il numero $\pm \varepsilon$ deve svanire per $x = \infty$; sarà ora facile dalla stabilita equazione dedurre i valori delle costanti α, β determinati dagli elementi della curva, e si ricaverà per $x = \infty$

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \left(\alpha + \frac{\beta \pm \varepsilon}{x}\right) = \alpha$$

$$\lim (y - \alpha x) = \lim (\beta \pm \varepsilon) = \beta$$

e per conseguenza il coefficiente α della x nell'equazione dell'assintoto vien determinato dal limite verso il quale converge il rapporto dell'ordinata all' ascissa per valori infinitamente grandi della medesima: la costante β si ottiene dal limite di $y - \alpha x$ dopo la sostituzione del valore della α, e per ciascun sistema di valori di α, e β corrisponderà un assintoto rettilineo della curva.

136.° Per mostrare un qualche esempio consideriamo una logaritmica di equazione

$$y = a^x$$

si troverà per $x = -\infty$

$$\alpha = \lim \frac{a^x}{x} = 0\ , \quad \beta = \lim y = \lim a^x = 0$$

dunque la curva logaritmica ha per assintoto l'asse delle x dalla parte negativa ed al quale si accosta indefinitamente senza mai raggiungerlo.

Un'iperbola di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

porge

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}\ .$$

quindi per $x = \pm \infty$, avremo

$$\alpha = \lim \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}\ , \quad \beta = 0$$

e perciò l'iperbola ha per assintoti due rette che passano per il centro, e di equazioni

$$y = \frac{b}{a} x\ , \quad y = -\frac{b}{a} x$$

Se si voglia calcolare l'angolo V compreso dagli assintoti, prenderemo la formola generale

$$\cos V = \frac{1 + \alpha\alpha'}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+\alpha'^2}}$$

α, α' sono le tangenti trigonometriche degli angoli che le due rette formano con l'asse delle ascisse; nel nostro caso

$$\alpha = \frac{b}{a}\ , \quad \alpha' = -\frac{b}{a}$$

quindi

$$\cos V = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Nell'iperbola equilatera $a = b$, $\cos V = 0$ e perciò gli assintoti s' incontreranno perpendicolarmente al centro della curva.

137.° Supponendo che l'equazione di una curva sia rappresentata dall'equazione

$$f(x, y) = c$$

la ricerca degli assintoti rettilinei si renderà assai facile quante volte $f(x, y)$ sia decomponibile in più parti, ciascuna delle quali sia una funzione omogenea delle variabili x, y. Sotto queste condizioni sieno $m, n \ldots\ldots$ i gradi delle funzioni omogenee, ricaveremo

$$f(x, y) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots$$

Formando i numeri $m, n \ldots$ una serie decrescente, si faccia $s = \frac{y}{x}$ e si determini la s per mezzo dell'equazione

$$x^m \varphi(s) + x^n \psi(s) + \ldots = 0$$

ovvero

$$\varphi(s) + \frac{1}{x^{m-n}} \psi(s) + \ldots = 0$$

quindi per $x = \infty$, ed $\frac{1}{x} = 0$, sia $s = \alpha$, verrà evidentemente

$$\varphi(\alpha) = 0$$

Una radice reale di quest'equazione porgerà il valore del

coefficiente α della x nell'equazione dell'assintoto

$$y = \alpha x + \beta$$

Il termine indipendente β si otterrà per la sostituzione della y nella equazione relativa alla s; ciò che darà

$$x^m \varphi(\alpha + \frac{\beta}{x}) + x^n \psi(\alpha + \frac{\beta}{x}) + \ldots . = 0$$

Ora in forza dell'equazione $\varphi(\alpha) = 0$, avremo da una formola stabilita al parag. 49.

$$\varphi(\alpha + \frac{\beta}{x}) = \frac{\beta}{x} \varphi'(\alpha + \theta \frac{\beta}{\alpha})$$

ove $\theta > 0$, e < 1, e per conseguenza

$$x^{m-1} \beta \varphi'(\alpha + \theta \frac{\beta}{x}) + x^n \psi(\alpha + \frac{\beta}{x}) + \ldots = 0$$

ovvero

$$\beta \varphi'(\alpha + \theta \frac{\beta}{x}) + \frac{1}{x^{m-n-1}} \psi(\alpha + \frac{\beta}{x}) + \ldots = 0$$

Facendo adunque $\frac{1}{x} = 0$, avremo per $n < m - 1$, $\beta = 0$; per $n = m - 1$ si ricaverà

$$\beta = -\frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$$

Infine per $n > m - 1$, $\beta = \pm \infty$; tutto ciò sussisterà quante volte $\varphi'(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, ... ritengano valori finiti. Le tre differenti espressioni di β porgono nel primo caso un'assintoto che passa per l'origine delle coordinate, e

di equazione

$$y = \alpha x$$

Nel secondo caso un'assintoto della forma

$$y = \alpha x - \frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$$

Nel terzo caso l'assintoto trovandosi ad una distanza infinita dall'origine, verrà del tutto a scomparire. Dalla prima ipotesi ne segue che per valori di $m > n + 1$ la ricerca degli assintoti rettilinei che passano per l'origine si otterrà dall'eguagliare a zero la funzione omogenea del grado m.

138.° Così per esempio nelle linee del secondo ordine

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = K$$

si avrà

$$\varphi(s) = A + 2Bs + Cs^2\ , \quad \psi(s) = 2D + 2Es$$

quindi per $\varphi(s) = o$, dedurremo le radici

$$\alpha = -\left(\frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{C}\right)\ , \quad \alpha' = -\left(\frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{C}\right)$$

ed insieme

$$\varphi'(s) = 2\,(B + Cs)\ ,$$

d'onde l'equazioni dell'assintoti saranno

$$y = \alpha x - \frac{(D + E\alpha)}{B + C\alpha}\ , \quad y = \alpha' x - \frac{(D + E\alpha')}{B + C\alpha'}$$

La curva non potrà esser diversa dall'iperbola, mentre le radici α, α' saranno reali per $B^2 - AC > o$: che se si voglia $B^2 - AC = o$, come nella parabola allora

il secondo termine dei valori della y diverrà infinita, ciò che dimostra che fra le curve del second'ordine la sola iperbola ammette gli assintoti.

Nella curva del terz'ordine

$$x^3+y^3=3axy$$

e che si chiama il *folium* di Cartesio si verifica

$$m=3\,,\quad n=2\qquad \varphi(s)=1+s^3\,,\quad \psi(s)=3as$$

quindi le due equazioni

$$x^3+y^3=0\,,\qquad 1+s^3=0$$

sono verificate dai valori reali

$$y=-x\,,\qquad s=-1=\alpha$$

ed osservando che $m=n+1$, $\varphi'(s)=3s^2$ si avrà per l'equazione dell'assintoto

$$y=-x-a$$

Supponiamo ancora, che sia data la curva del terz'ordine determinata dall'equazione

$$y^3+xy^2-2x^2y+y^2-3xy+y+x=0$$

avremo

$$m=3\,,\ n=2\,,\qquad \varphi(s)=s^3+s^2-2s$$

$$\psi(s)=s^2-3s\,,\qquad \varphi'(s)=3s^2+2s-2$$

Ora l'equazione

$$s^3+s^2-2s=0$$

ha per radici

$$s=0\,,\quad s=1\,,\quad s=-2$$

dunque sostituendo nell'equazione

$$y = \alpha x - \frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$$

dell'assintoto rettilineo, i valori successivi o, 1, — 2 in luogo di α, si otterrà

$$y = 0\ , \quad y = x + \frac{2}{3}\ , \quad y = -2x - \frac{5}{3}$$

Tali sono l'equazioni degli tre assintoti rettilinei della curva proposta; il primo dei quali coincide con l'asse delle ascisse.

Se le due funzioni $\varphi'(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ divengono nulle, o infinite, allora β avrà un valore differente da quei che abbiamo ottenuti, contuttociò per determinarlo, basterà conoscere il limite, od i limiti, verso i quali convergerà la β per $\frac{1}{x} = 0$; Così nella curva di equazione

$$y^2 = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

si ricava $\alpha = 0$, e nello stesso tempo β si determinerà dall'equazione

$$\beta^2 = \cos\left(\frac{\beta}{x}\right)$$

per valori infiniti delle x; cioè che darà

$$\beta^2 = 1\ , \qquad \text{ovvero} \qquad \beta = 1\ , \quad \beta = -1$$

Ognun vede in questo caso che ad un solo valore di α, corrispondono due valori di β, in modo che la curva avrà due assintoti paralleli all'asse delle x vale a dire

$$y = 1\ , \quad y = -1.$$

139.° La ricerca dei massimi e minimi valori di una funzione

$$y = f(x)$$

dipende come si sa dalle radici di una delle due equazioni

$$f'(x) = 0\,, \qquad \frac{1}{f'(x)} = 0$$

ed insieme per i medesimi valori

$$f^{(2n)}(x) < 0 \qquad \text{nel caso del massimo}$$

e

$$f^{(2n)}(x) < 0 \qquad \text{per il minimo.}$$

Quando la funzione sia continua, avrà luogo soltanto $f'(x) = 0$, e se le variabili x, y rappresentino due coordinate ortogonali di una data curva, allora potremo dire in generale, che nei punti ove si hanno le ordinate massime, e minime, la retta tangente sarà parallela all'asse delle x; come nel caso della funzione discontinua, le rette tangenti alla curva in quei punti ove trovasi l'ordinata massima, o minima, saranno perpendicolari all'asse delle ascisse: quei punti delle curve, ove l'ordinata, e l'ascissa assume un valore massimo, o minimo non presentano generalmente delle particolarità inerenti alla natura della curva, ma dipendono unicamente dalla scelta delle coordinate alle quali è riferita. Così per esempio nella curva di equazione

$$y = \sqrt{2ax^2 - x^3}$$

abbiamo dalla derivazione

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{4a - 3x}{2\sqrt{2a - x}}.$$

quindi la condizione $y' = 0$ del massimo, o del minimo, darà $4a - 3x = 0$, ovvero $x = \frac{4}{3}a$. Proseguendo la derivazione, o sostituendo il valore della x, troviamo

$$y'' = -\sqrt{\frac{3}{2}a} < 0$$

dunque all'ascissa $x = \frac{4}{3}a$ corrisponde un' ordinata massima nella curva. Sia di più la curva del second'ordine

$$y = \sqrt{x^2 - ax}$$

si avrà

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2x - a}{2\sqrt{x^2 - ax}}$$

Se facciamo $y' = 0$, si verificherà necessariamente

$$2x - a = 0, \qquad \text{ossia} \qquad x = \frac{a}{2}$$

qual valore sostituito nel secondo membro della y, otterremo i due valori immaginarii

$$y = \pm \frac{a\sqrt{-1}}{2}$$

e per conseguenza all'ascissa $x = \frac{a}{2}$ non possono corrispondere ordinate massima, o minima: che se si supponga

$$\frac{1}{y'} = 0$$

allora dovrà essere

$$x^2 - ax = 0, \qquad \text{cioè} \qquad x = 0, \quad x = a,$$

In questi punti corrispondono le ordinate $y = o$, le quali si potranno riguardare come due specie di *minimi.*

140.° Con egual facilità si giunge a determinare le condizioni, onde una curva volga la sua concavità, o convessità verso l'asse dell'ascisse. Consideriamo di fatti il rapporto

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

per il tratto di curva concava verso l'asse delle ascisse, vedremo che nella generalità al crescere della x diminuisce la y', e viceversa, perciò la y' è una funzione della indipendente x, che all'aumentare, o diminuire della medesima diminuisce, o cresce la funzione, e per conseguenza la funzione derivata da $y' = f'(x)$, dovrà esser negativa, ossia

$$f''(x) < o$$

all'opposto in una curva convessa verso l'asse delle ascisse, la funzione y' cresce o diminuisce all'aumentare, o diminuire della x, per cui sarà

$$f''(x) > o$$

Le curve di equazioni

$$y^2 = px + qx^2 , \qquad y = a \operatorname{sen} x$$

volgono costantemente la loro concavità verso l' asse delle ascisse, mentre in queste le loro funzioni derivate seconde

$$y'' = -\frac{p^2}{4y^3} < o , \qquad y'' = -a \operatorname{sen} x < o$$

Al contrario le due curve

$$y = a^x , \qquad ay^2 = x^3$$

presentano la loro convessità verso l'asse delle ascisse, e si verifica

$$y'' = (\log a)^2 a^x > 0, \quad y'' = \frac{3}{8}\frac{x^4}{a^3 y^2} > 0$$

Una curva potrà esser composta di più rami, alcuni concavi, ed altri convessi verso l'asse dell'ascisse. Quei punti nei quali la curva da convessa, diviene concava, e viceversa, si chiamano *punti d' inflessione*; ora avendosi $y'' < 0$ per la concavità, ed $y'' > 0$ per la convessità: ne siegue che se la funzione $y'' = f''(x)$ è continua non potrà passare dai valori positivi ai negativi, e viceversa senza passar per lo zero, come d'altronde diverrà infinita nel caso della discontinuità, e per conseguenza le radici di una delle due equazioni

$$f''(x) = 0, \quad \frac{1}{f''(x)} = 0$$

determineranno certi valori delle ascisse x alle quali corrisponderanno i punti d'inflessione, se la $f''(x)$ cangierà di segno, e la $f'''(x)$ non sia nulla, o lo sia con $f^{\text{IV}}(x)$, e così successivamente.

Nella curva di equazione

$$y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}$$

abbiamo

$$y' = \frac{2a^3 x}{(a^2 + x^2)^2}, \quad y'' = \frac{2a^3 (a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3}$$

$$y''' = -\frac{24a^3 x (a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^4}$$

La condizione $y'' = o$, darà per l'ascissa

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}\ ,\quad x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Di più sostituendo $\frac{a}{\sqrt{3}} + h$ in luogo della x nella y''' si ha $y''' < o$ ed $-\frac{a}{\sqrt{3}} + h$, darà $y'' > o$, dunque la curva dopo di esser stata convessa dall' origine fino all'ascissa $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ diverrà concava, e nel secondo caso ancora passerà dalla convessità alla concavità. Nella curva trascendente rappresentata dalla equazione

$$y = 1 + \text{sen}\ x$$

si ha

$$y' = \cos x\ ,\quad y'' = -\text{sen}\ x,\quad y''' = -\cos x\ ,$$

La condizione $y'' = o$ porge le radici

$$x = o\ ,\quad x = \pi\ ,\quad x = 2\pi\ ,\quad x = 3\pi\ ,\ \ldots .$$

e la sostituzione successiva di $x + h$ invece delle x nella y''' la rende successivamente negativa, e positiva, e perciò vi sarà un'infinità di punti d'inflessione, e la curva passerà continuamente dalla convessità alla concavità e viceversa; questo stesso accade per i medesimi valori negativi della x. Non solamente i punti d'inflessione son quei punti che presentano alcune particolarità inerenti alla natura delle curve; ma questi medesimi entrano nella classe di quei che in diverse curve si chiamano *punti singolari*.

141.° Oltre adunque ai punti d'inflessione vi sono nelle curve, i *punti multipli*, i punti *isolati*, o *conjugati*, i punti di *regresso*, i punti di *arresto*, ed i punti *salienti*.

I punti multipli son quei ove passano diversi rami di curva, in modo da poter condurre differenti rette tangenti: quando l'equazione della curva sia algebrica, e razionale la ricerca dei punti multipli può ridursi a quanto segue: Sia

$$u = o$$

la nominata equazione, si avrà dalla derivazione

$$D_x u + D_y u \, y' = o$$

Quest' equazione dovrà esser soddisfatta da più valori della tangente trigonometrica y', e per conseguenza si dovrà avere unitamente ad $u = o$

$$D_x u = o \,, \qquad D_y u = o$$

altrimenti ai medesimi valori delle derivate $D_x u$, $D_y u$, corrisponderebbero più valori della y': quando si trovino per le tre equazioni

$$u = o \,, \qquad D_x u = o \,, \qquad D_y u = o$$

dei valori reali, allora proseguendo la derivazione dell' equazione, il valore delle y' sarà dato dalle radici dell' equazione

$$D_x^2 u + 2 D_x \, D_y u \, y' + D_y^2 u . \, y'^2 = o$$

In quest'ipotesi due rami di curva passeranno per il medesimo punto, e che si chiamerà un *punto doppio*. Supponendo che tre rami di curva si riuniscano in un sol punto, svaniranno in questo caso le derivate del second' ordine dell'equazione $u = o$, e per dedurre i valori della tangente trigonometrica y', converrà ricorrere alle derivate del terzo ordine, e così successivamente . . . . .
Così data la curva del terzo ordine

$$a (y - b) = x (x - a)^2$$

avremo

$$2a(y-b)y'=(x-a)(3x-a)$$

$$2ay'^2+2a(y-b)y''=3x-a+3(x-a).$$

I valori reali che soddisfino alle tre equazioni simultanee

$$a(y-b)=x(x-a)^2,\quad 2a(y-b)=0,\quad (x-a)(3x-a)=0$$

sono evidentemente

$$x=a\,,\quad y=b$$

E perciò in questo punto vi sarà un *punto doppio* della curva: i valori poi della y' dipendono dall'equazione

$$2ay'^2=2a\,,\qquad \text{ovvero}\qquad y'^2=1$$

ossia

$$y'=1\,,\qquad y'=-1$$

e per conseguenza i due rami di curva hanno le loro tangenti inclinate ad angolo semiretto, e dirette in senso contrario.

Prendiamo ancora la curva del quarto ordine rappresentata dall'equazione

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$$

la quale appartiene alla *Lemniscata* di Bernoulli, avremo per le derivate parziali dell'equazione

$$D_x u=2(x^2+y^2)x-2a^2x$$

$$D_y u=2(x^2+y^2)y+2a^2y$$

Ora il valore comune di x, e di y che verifichi simultaneamente l'equazione finita della curva, e le due condizioni

$$D_x u=0\,,\qquad D_y u=0$$

sono

$$x=0\,,\qquad y=0$$

e perciò proseguendo la derivazione si trova

$$D_x^2 u = 2(x^2 + y^2) + 4x^2 - 2a^2$$

$$D_y^2 u = 2(x^2 + y^2) + 4y^2 + 2a^2$$

$$D_x D_y u = 4xy$$

Queste tre espressioni per $x = o$, $y = o$, divengono

$$D_x^2 u = -2a^2, \quad D_y^2 u = 2a^2, \quad D_x D_y u = o$$

Se ora questi valori si sostituiscano nell'equazione

$$D_x^2 u + 2D_x D_y u\, y' + D_y^2 u\, y'^2 = o$$

otterremo

$$-2a^2 + 2a^2 y'^2 = o$$

d'onde

$$y'^2 - 1 = o \qquad \text{ed} \qquad y' = 1, \qquad y' = -1$$

e perciò nell'origine delle coordinate che coincide il centro della curva i due rami di curva hanno le loro tangenti inclinate ad angolo semiretto, e dirette in senso contrario; il centro adunque della *Lemmiscata* è un punto doppio.

I punti *isolati* o conjugati son quei nei quali le coordinate soddisfano all'equazione della curva, ma che nel medesimo tempo sono interamente separati dalla curva. In questi particolari punti la funzione derivata y' deve essere immaginaria, ma ciò non si potrà dedurre dall'equazione differenziale del primo ordine; converrà adunque che le coordinate dei punti conjugati soddisfino all'equazioni

$$D_x u = o, \qquad D_y u = o.$$

Così nella curva

$$y^2 = x^2(x^2 - a^2)$$

si ha

$$D_y u = 2y\,,\quad D_x u = 4x^3 - 2a^2 x$$

I secondi membri si annullano per

$$x = o\,,\qquad y = o$$

e perciò l'origine delle coordinate è un punto isolato.

142.° Quanto in un punto multiplo i due valori della derivata y' sono eguali, e che i due rami si arrestano in questo punto, si ha un punto di *regresso*. Sarà di prima specie se le convessità si oppongono in modo che la retta tangente trovasi situata fra i due rami opposti dalla curva: il *regresso* sarà di seconda specie se nella retta tangente comune la convessità dell' uno dei rami guardi la concavità del secondo.

Così nella parabola cubica di equazione

$$y^3 - ax^2 = o$$

si ha per le derivate dell'equazione

$$D_y u = 3y^2\,,\qquad D_x u = -2ax$$

Ora alle condizioni

$$y^3 - ax^2 = o\,,\quad 3y^2 = o\,,\quad 2ax = o$$

si soddisfa per $x = o$, $y = o$, ed in quest'ipotesi la derivata y' diviene infinita, dunque l'origine sarà un punto di *regresso* di prima specie, e nel quale la tangente comune è perpendicolare all'asse delle ascisse. Prendendo la curva di equazione

$$(y - ax^2)^2 = b^2 x^5,$$

dalla quale ricaviamo

$$y = ax^2 \pm bx^2 \sqrt{x}\ ,\quad y' = 2ax \pm \frac{5}{2}\, bx \sqrt{x}$$

$$y'' = 2a \pm \frac{15}{4}\, b \sqrt{x}$$

All'origine $x = o$, $y = o$, si ha $y' = o$ ed insieme $y'' = 2a$, e perciò la y'' conservando il medesimo segno, ne verrà che l'origine delle coordinate è un punto di regresso di seconda specie.

I punti *d'arresto* son quei nei quali si ferma improvisamente un ramo unico di curva: si riconosceranno questi punti col cercare quei valori della x, dopo i quali l'ordinata y diviene immaginaria se era reale, e viceversa: onde poi in uno di questi punti non vi passi che un sol ramo di curva, la ordinata y ammetterà un valore unico per ciascun valore dell'ascissa x. Nelle curve rappresentate dall'equazioni

$$y = \frac{1}{\log x}\ ,\qquad y = x \log x$$

si ha un punto *d'arresto* all'origine.

Finalmente si diranno punti *salienti* ove si fermano due rami di curva, in modo che le rette tangenti formino fra di loro un certo angolo: le ordinate dei due rami diverranno tutte dne immaginarie da un lato, e dall'altro di questi punti, quantunque i due rami di curva sieno determinati da equazioni distinte: per questo motivo i punti *salienti* differiscono dai punti multipli. Nella curva trascendente

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

per $x = o$ si ha sempre $y = o$, o si faccia passare la x per valori positivi, e per valori negativi. Prendendo la derivata si avrà

$$y' = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{x e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

Facendo ora $x = o$, trova $y' = o$, ed $y' = 1$, secondo che si faccia passare la x per valori positivi, o negativi: e perciò l' origine è un punto *saliente* della curva. Così anche nella curva di equazione

$$y = x \text{ arc tang } \frac{1}{x}$$

abbiamo

$$y' = \text{arc tang } \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}$$

e si troverà per $x = o$, $y' = \frac{1}{2}\pi$, od $y' = -\frac{1}{2}\pi$ secondo che la x passi per valori positivi, o negativi.

Chi desiderasse un maggior sviluppo della dottrina degli assintoti, e dei punti singolari potrà consultare l'opera del sig. *Blanchet* intitolata, *Complements de Mathématiques spéciales*, *Paris* 1838.

Sulla misura della Curvatura di una curva piana in un punto dato. Raggio di curvatura, Centro di curvatura e Circolo osculatore.

143.° L'uniformità di curvatura che presenta in ogni suo punto la circonferenza di un circolo ha somministrato ai geometri l'idea di misurar la curvatura delle differenti curve nei respettivi loro punti per mezzo del contatto di altrettanti circoli di raggio continuamente variabile, e di comun curvatura con la linea data, allora la maggior, o minore lunghezza del raggio di questi circoli porrà in evidenza la minor o maggior curvatura della linea.

Sia primieramente R il raggio di un circolo che tocca una retta in un punto dato. Se si fa crescere indefinitamente il raggio R è evidente che la porzione della circonferenza che si avvicina al punto di contatto, si accosterà continuamente alla retta in questione, e verrà sensibilmente a confondersi con la medesima, quando il rapporto $\frac{1}{R}$ differisca pochissimo dallo zero. All' opposto la circonferenza si curverà sempre più, se il raggio R venendo a diminuire cresca il rapporto $\frac{1}{R}$ quindi è che il rapporto $\frac{1}{R}$ si potrà prendere per misura di ciò, che si può chiamare *Curvatura del Circolo.*

Sieno ora x, y le coordinate rettilinee di un punto qualunque della circonferenza, φ l'angolo d'inclinazione della retta tangente al medesimo punto rapporto all'asse delle x, ed s l'arco compreso fra un punto fisso ed il punto (x, y). Passando dal punto (x, y) al punto infinitamente vicino $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ rappresenteremo

egualmente per $\Delta\varphi$, Δs i corrispondenti incrementi infinitesimi dell'inclinazione φ, e dell'arco s: sotto questa condizione l'angolo φ crescerà o decrescerà nell'intervallo infinitesimo Δs dei due punti. Ciò posto è chiaro che l'arco $\pm\Delta s$ compreso fra i due punti dati appartiene al raggio R, e l'arco $\pm\Delta\varphi$ al raggio 1, e siccome l'angolo compreso fra le due tangenti ai punti (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ è eguale all'angolo compreso fra i due raggi perpendicolari alle tangenti, perciò avremo la proporzione geometrica

$$1 : \mathrm{R} :: \pm\Delta\varphi : \Delta s$$

dalla quale

$$\mathrm{R} = \pm\frac{\Delta s}{\Delta\varphi}, \qquad \frac{1}{\mathrm{R}} = \pm\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

La seconda di queste espressioni rappresenterà la *curvatura del Circolo.*

144.° Immaginiamo adesso due punti (x, y) ed $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ in una curva piana qualunque, e secondo il consueto sia s l'arco compreso fra un punto fisso, ed il punto (x, y), sarà $\pm\Delta s$ l'arco compreso fra questi punti, che noi supporremo assai vicini, onde l'inclinazione φ della curva al punto (x, y) rapporto all' asse delle x possa crescere, o decrescere in un modo continuo in tutta l'estensione del medesimo arco Δs.

Il rapporto

$$\pm\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

varierà in generale con l'arco $\pm\Delta s$, e si chiamerà *Curvatura media* dell'arco; e se i due punti (x, y) $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ si accostano indefinitamente fra di loro in modo da annullarsi gli incrementi $\Delta x, \Delta y$, allora le due quantità infinitesime $\pm\Delta s$, $\pm\Delta\varphi$ convergeranno

simultaneamente verso lo zero, ma considerando l'inclinazione φ come funzione dell'arco s, il rapporto dei loro incrementi infinitesimi convergerà verso il rapporto dei differenziali

$$\pm \frac{d\varphi}{ds}$$

quale sarà una quantità finita, e che potrà chiamarsi *Curvatura* della linea al punto (x, y). L'angolo $\pm \Delta\varphi$ compreso fra le tangenti estreme dell' arco Δs dicesi, *angolo di contingenza*. Dalle stabilite riflessioni ne segue, che chiamando ρ il raggio di quel circolo, che con una curva ha comune in un dato punto il rapporto

$$\pm \frac{d\varphi}{ds}$$

sarà

$$\frac{1}{\rho} = \lim \frac{1}{R} = \pm \frac{d\varphi}{ds}$$

Il centro di questo circolo si determina dal limite verso il quale converge l'incontro di due normali consecutive alla curva: ed infatti chiamando c la corda dell'arco Δs; ed R una di queste normali determinata dall' incontro della consecutiva, e che potremo supporre sensibilmente eguali, è evidente che l' angolo delle due normali sarà eguale all'angolo di contingenza, ed una qualunque di queste normali R nel triangolo di lati (R, R, C) è opposta ad un angolo che differisce dal retto di una quantità infinitesima ε, quindi si verificherà la proporzione

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right)}{R} = \pm \frac{\operatorname{sen} \Delta\varphi}{c}$$

Per conoscere il limite verso il quale converge il se-

condo membro per l'annullamento di $\Delta\varphi$, e c, basterà osservare che si ha identicamente

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right)}{R} = \pm \frac{\operatorname{sen}\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{c}$$

ma

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1\,, \quad \lim \frac{\Delta s}{c} = 1\,, \quad \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

dunque

$$\lim \frac{1}{R} = \pm \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

la quale coincide con l'equazione di già trovata: il valore di ρ rappresenta il raggio di un circolo del quale la curvatura è eguale a $\frac{d\varphi}{ds}$; se dunque a partire dal punto (x, y), si porti sulla direzione della normale alla curva il raggio ρ, si chiamerà *Raggio di curvatura* della curva proposta, e relativo al punto di cui si tratta, l'estremo del raggio dicesi *Centro di curvatura*, che verrà ancora determinato dall' incontro di due normali infinitamente vicine. Il circolo che ha questo ultimo punto per centro; e per raggio il raggio di curvatura, si chiama *Circolo di curvatura*, od anche *Circolo osculatore*. Tocca la curva alla stessa sua curvatura, e volge la sua concavità dalla medesima parte.

145.° Per applicare con maggior facilità l'espressione del raggio del circolo osculatore, sarà utile d' indicare alcune trasformazioni che può ricevere. Riprendiamo per l'inclinazione φ, e per l' arco s le due formole

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy \operatorname{sen} A}{dx + dy \cos A}, \quad ds = (dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A)^{\frac{1}{2}}$$

e per la differenziazione della prima avremo

$$d\varphi = \frac{(dx\, d^2y - dy\, d^2x) \operatorname{sen} A}{dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A}$$

quindi per la sostituzione nel valore di $\frac{1}{\rho}$ verrà

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{(dx\, d^2y - dy\, d^2x) \operatorname{sen} A}{(dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A)^{\frac{3}{2}}}$$

la quale si potrà anche rappresentare da

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{(dx\, d^2y - dy\, d^2x) \operatorname{sen} A}{ds^3}$$

Volendo introdurci le derivate del primo, e secondo ordine dell'ordinata y, basterà avvertire che

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3} = y''$$

e per conseguenza (parag. 40.)

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y'' \operatorname{sen} A}{(1 + y'^2 + 2y' \cos A)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{y'' \operatorname{sen} A}{(1 + y' \cos A)^3 \sec^3 \varphi}$$

Nel caso degli assi ortogonali, si ha

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ovvero

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{y''}{\sec^3 \varphi}$$

Queste differenti espressioni snssistono qualnnque sia la variabile indipendente, il segno $+$ avrà luogo per le curve convesse verso l'asse delle ascisse, ed il segno $-$ per le curve concave, poichè nelle prime $y'' > o$ e nelle seconde $y'' < o$. Inoltre è evidente che la curvatura si annulla, ed il raggio del circolo osculatore diverrà infinito per quei punti delle curve, ove si verifica $y'' = o$. Questa circostanza ha luogo in generale per tntti quei pnnti d' inflessione, nella vicinanza dei quali le due derivate y', y'' conserveranno la legge di continnità. Se per certi punti la y'' divenisse infinita senza che lo fosse y', nel qual caso la tangente diviene perpendicolare all'asse delle ascisse nel sistema degli assi ortogonali, allora la curvatura sarà ella stessa infinita, ed il raggio di curvatura si annullerà; infine se le due derivate y', y'' divengono ambedue infinite, il valore di $\frac{1}{\rho}$ si presenterà sotto una forma indeterminata e ne conosceremo l'effettivo valore per mezzo delle regole di già stabilite al parag. 52 e segu. Osservando poi che la normale alla curva si esprime per

$$n = \frac{y \operatorname{sen} A}{\cos \varphi} = y \operatorname{sen} A \sec \varphi$$

si avrà per la determinazione del raggio di Curvatura, la formola

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y^3 y'' \operatorname{sen}^4 A}{n^3 (1 + y' \cos A)^3}$$

Quando gli assi sono ortogonali, diverrà

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y^3 y''}{n^3} = \pm y'' \left(\frac{y}{n}\right)^3$$

Quando non sia dato che la sola relazione od eqnazione

$$u = o \,, \qquad o \,, \quad f(x, y) = o$$

Allora come già vedemmo al parag. 82.

$$y' = -\frac{D_x u}{D_y u}$$

$$y'' = -\frac{\left(D_x^2 u\,(D_y u)^2 - 2D_x u\,D_y u\,D_x\,D_y u + D_y^2 u\,(D_x u)^2\right)}{(D_y u)^3}$$

quai valori sostituiti nell'equazione

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{y''\text{sen A}}{(1 + y'^2 + 2y'\cos A)^{\frac{3}{2}}}$$

diverrà

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{\left(D_x^2 u\,(D_y u)^2 - 2D_x u\,D_y u\,D_x\,D_y u + D_y^2 u\,(D_x u)^2\right)\text{sen A}}{\left((D_x u)^2 + (D_y u)^2 - 2D_x u\,D_y u\cos A\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Qui pure nel sistema di assi ortogonali, si ridurrà ad

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{\left(D_x^2 u\,(D_y u)^2 - 2D_x u\,D_y u\,D_x\,D_y u + D_y^2 u(D_x u)^2\right)}{\left((D_x u)^2 + (D_y u)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Sotto qualcuna di queste differenti forme è che il raggio di curvatura si presta più meno facilmente a particolari applicazioni che veniamo successivamente ad esporre.

146.° L'equazione generale delle linee del secondo ordine con l'origine al vertice è

$$y^2 = px + qx^2$$

Nella parabola $q = o$. nell'ellissi $q < o$, e nell'iperbola

$q > o$, ed i valori di p, q, sono

$$p = \frac{2b^2}{a}, \quad q = \pm \frac{p}{2a}$$

Nella parabola $a = \infty$, ed il parametro p non diviene zero, ma sarà eguale al quadruplo della distanza del fuoco dal vertice (*). Differenziando l'equazione, otterremo la derivata

$$y' = \frac{p + 2qx}{2y}$$

dalla quale per una nuova derivazione sarà

$$y'' = -\frac{(p + 2qx)^2 - 4qy^2}{4y^3}$$

ovvero

$$y'' = -\frac{p^2}{4y^3}$$

Quest'espressione essendo indipendente da y, manterrà la medesima forma per le tre linee del second' ordine.

(*) Sieno c, m le distanze del fuoco dal centro, e dal vertice dell'ellissi, avremo

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad b^2 = a^2 - c^2, \quad c = a - m,$$

per cui

$$b^2 = 2am - m^2$$

Con questi valori si ha per il parametro

$$p = \frac{2b^2}{a} = 4m - \frac{2m^2}{a}$$

Che per $a = \infty$ si riduce a $4m$.

Sostituendo questo valore nell'ultima formola dell'antecedente parag., e scegliendo il segno — poichè le curve volgono la loro concavità verso l'asse delle ascisse, si avrà

$$\rho = \frac{4n^3}{p^2}$$

Cioè il raggio di curvatura delle linee del second'ordine in ogni loro punto è sempre eguale al cubo della corrispondente *normale*, diviso per il quadrato della metà del parametro; di più per tutte le linee del second'ordine è stato dimostrato che chiamando r il raggio vettore condotto dal fuoco al punto (x, y), e q la perpendicolare abbassata dal medesimo fuoco sulla direzione della tangente, si ha per la normale

$$n = \frac{pr}{2q}$$

Così per le stesse linee del second'ordine, otterremo

$$\rho = \frac{pr^3}{2q^3}$$

In tutti i vertici di ciascuna delle tre curve $r = q$, dunque per questi punti

$$\rho = \frac{p}{2}$$

vale a dire, il raggio di curvatura ρ è eguale alla metà del parametro. Volendo adoprare l'equazione delle curve sotto la forma

$$u = 0\,, \qquad \text{od} \qquad y^2 - px - qx^2 = 0$$

si avrà

$$D_x u = -(p + 2qx)\,, \quad D_y u = 2y\,, \quad D_x\, D_y u = 0$$

$$D_x^2 u = -2q\,, \qquad D_y^2 u = 2$$

Quali valori sostituiti in una delle due ultime espressioni di ρ dell'antecedente parag., si ottiene egualmente il raggio di curvatura ρ in funzione delle x, y per tutte le linee di secondo ordine riferite ad assi obliqui, o rettangolari. Ma noi riprenderemo ad esame ciascuna delle tre curve in particolare, dopo di aver esposto nuove applicazioni a certe curve trascendenti e di aver inindicato differente altre espressioni del raggio di curvatura.

147.° In una Cicloide con l'origine al vertice della base si trovò

$$y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}\ , \quad \text{e perciò} \quad 1 + y'^2 = \frac{2a}{y}$$

Eseguendo una nuova derivazione, otteniamo immediatamente

$$y'' = -\frac{a}{y^2}$$

Se questi valori si sostituiscano nell'espressione del raggio di curvatura

$$\rho = -\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

avremo a riduzioni eseguite

$$\rho = 2\sqrt{2ay} = 2n$$

Cioè il raggio di curvatura in un punto qualunque della cicloide è sempre doppio della corrispondente normale; nel vertice superiore della curva ove $y = 2a$, si avrà

$$\rho = 4a.$$

Formiamo ora il quadrato del valore generale di ρ, vale a dire

$$\rho^2 = 8ay$$

Questa espressione può rappresentare una parabola di parametro $8a$, ed il valore del raggio di curvatura nel vertice di questa curva è precisamente $4a$ metà del parametro. Se dunque lungo il diametro $2a$ preso come asse si descriva attorno la cicloide una parabola di parametro $8a$, il vertice di questa parabola toccherà la cicloide alla propria curvatura.

148.° Nella curva logaritmica di equazione

$$y = a \log x$$

si ricaverà

$$y' = \frac{a}{x}, \quad y'' = -\frac{a}{x^2}$$

Quindi il raggio di curvatura

$$\rho = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{ax}$$

Il valore di ρ cresce al crescer della x. Prendendo la curva catenaria di equazione

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

ed eseguendo due derivazioni, avremo

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}$$

Sostituendo questi valori nell'espressione di ρ con il segno $+$, come curva convessa verso l'asse delle ascisse, sarà

$$\rho = \frac{a^2\left(2 + e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}}{8y}$$

la quale si riduce evidentemente a

$$\rho = \frac{y^2}{a}$$

Al medesimo risultato saremmo giunti, avvertendo che nella Catenaria l'arco s è determinato dalla formola

$$s = ay' = a \operatorname{tang} \varphi$$

quindi

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = a\,(1 + \operatorname{tang}^2 \varphi) = a\,(1 + y'^2)$$

nella quale sostituendo il valore di y' e riducendo troveremo un risultato coincidente a quella di già ottenuto per ρ. Noi qui faremo osservare una bella proprietà di questa curva: abbiamo veduto che la normale alla Catenaria in un punto (x, y) si esprime per

$$\eta = \frac{y^2}{a}$$

e perciò nella Catenaria la retta normale è sempre eguale al raggio di curvatura rivolto in direzion contraria. Ognun vede che questa proprietà è simile a quella del circolo ove i raggi, e le normali hanno il medesimo valore: aggiungiamo che l'enunciate proprietà si verificano generalmente per mezzo del Calcolo integrale, quando si cerchi la natura della curva, nella quale la normale sia da per tutto eguale al raggio di curvatura, rivolto nel medesimo senso od in senso contrario; il primo caso appartiene al circolo, ed il secondo alla Catenaria.

148.° Oltre le differenti espressioni di già ottenute dai raggi di curvatura, ve ne sono delle altre che è ben di conoscere. Sia r il raggio vettore condotto dall'origine delle coordinate al punto (x, y), ed h la per-

pendicolare abbassata dalla medesima origine sulla direzione della tangente allo stesso punto (x, y), sarà come dal parag. 128.

$$h = \pm \frac{(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) \operatorname{sen} A}{\mathrm{d}s}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos A$$

Differenziando il valore di h, ed avvertendo che per la formola

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + 2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cos A$$

si ha

$$\mathrm{d}s\,\mathrm{d}^2s = \mathrm{d}^2x\,(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y \cos A) + \mathrm{d}^2y\,(\mathrm{d}y + \mathrm{d}x \cos A)$$

dedurremo

$$\mathrm{d}h = \pm \frac{[\mathrm{d}x\,(x + y \cos A) + \mathrm{d}y\,(y + x \cos A)]\,(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x) \operatorname{sen} A}{\mathrm{d}s^3}$$

Ora dalla differenziazione di r^2, abbiamo

$$r\mathrm{d}r = \mathrm{d}x\,(x + y \cos A) + \mathrm{d}y\,(y + x \cos A)$$

e dal raggio di curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x) \operatorname{sen} A}{\mathrm{d}s}$$

dunque

$$\mathrm{d}h = \frac{r\mathrm{d}r}{\rho}$$

d'onde

$$\rho = \frac{r\mathrm{d}r}{\mathrm{d}h}$$

Sotto questa forma, che noi faremo in appresso uso per dedurre alcune particolari espressioni del raggio di curvatura delle linee del secondo ordine; di più se si chiami

h_1 la perpendicolare abbassata dall'origine delle coordinate sulla direzione della normale al punto (x, y) fu trovato nel medesimo parag. 128.

$$h_1 = \frac{rdr}{ds}$$

e perciò

$$\rho = \frac{h_1 ds}{dh}$$

Questa nuova espressione del raggio di curvatura ci dice che per passare dal valore della normale

$$n = \frac{y ds}{dx}$$

a quello del raggio di curvatura basterà sostituire invece delle y, ed x le due rette perpendicolari h_1, ed h. Questi differenti risultati hanno luogo, qualunque sia la scelta della variabile indipendente, ed il sistema delle coordinate rettilinee. Che se una data variabile si scelga per indipendente, allora si troveranno anche nuove espressioni. Così supponendo le x, y funzioni dell'arco s, avremo primieramente

$$ds\, d^2s = d^2x\,(dx + dy \cos A) + d^2y\,(dy + dx \cos A) = 0$$

d'onde con facilità otteniamo

$$\frac{d^2x}{dy + dx \cos A} = \frac{d^2y}{-(dx + dy \cos A)} = \frac{dy\, d^2x - dx\, d^2y}{dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A}$$

od anche

$$\frac{d^2x}{dy + dx\cos A} = \frac{d^2y}{-(dx + dy\cos A)} = \pm\frac{\left((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + 2d^2x\, d^2y \cos A\right)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}A \left(dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A\right)^{\frac{1}{2}}}$$

quindi dal confronto di queste quantità eguali si ha per le formole del parag. 145

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{\left((d^2x)^2+(d^2y)^2+2d^2x\,d^2y\cos A\right)^{\frac{1}{2}}}{ds^2}$$

Ponendo poi per la notazione delle funzioni derivate

$$D_sx=\frac{dx}{ds},\ D_sy=\frac{dy}{ds},\ D_s^2x=\frac{d^2x}{ds^2},\ D_s^2y=\frac{d^2y}{ds^2}$$

otterremo

$$\rho=\pm\left((D_s^2x)^2+(D_s^2y)^2+2D_s^2x\,D_s^2y\cos A\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Al medesimo risultato si giunge anche più brevemente, differenziando direttamente i valori di dx, dy dati dalle formole cognite

$$dx+dy\cos A=ds\cos\varphi\ ,\ dy\,\text{sen}\,A=ds\,\text{sen}\,\varphi$$

mentre nell'ipotesi ds costante

$$\frac{d^2x+d^2y\cos A}{ds^2}=-\text{sen}\,\varphi\frac{d\varphi}{ds}\ ,\ \frac{d^2y\,\text{sen}\,A}{ds^2}=\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{ds}$$

Elevando al quadrato, e facendo la somma deduciamo dopo l'estrazione della radice quadrata

$$\frac{\left((d^2x)^2+(d^2y)^2+2d^2x\,d^2y\cos A\right)^{\frac{1}{2}}}{ds^2}=\pm\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{\rho}$$

come già fu trovato al parag. 144. Nell'ipotesi degli assi ortogonali, dedurremo semplicemente

$$\rho=\pm\left((D_sx)^2+(D_s^2y)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

149.° La supposizione di prendere l'arco s per variabile indipendente ci porge un occasione di far conoscere, come il raggio di curvatura dipenda da un limite di un certo quoziente : infatti se a partir dal punto (x, y) si prendano sulla curva data, e sulla tangente prolungata nella medesima direzione dell' arco s delle lunghezze eguali, ed infinitamente piccole rappresentate da i, avremo per i valori delle coordinate x, y dell' estremità della i portata sulla tangente

$$\mathrm{x} = x + \frac{i \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} A}, \qquad \mathrm{y} = y + \frac{i \operatorname{sen} (A - \varphi)}{\operatorname{sen} A}$$

Come per le coordinate X, Y, dell'estremità di i portata sulla curva, potremo prendere in generale

$$X = \psi(s + i), \quad Y = \chi(s + i)$$

Ora abbiamo

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} A} = \frac{dx}{ds}, \qquad \frac{\operatorname{sen} (A - \varphi)}{\operatorname{sen} A} = \frac{dy}{ds}$$

e prendendo nello stesso tempo

$$x = \psi(s), \qquad y = \chi(s)$$

otterremo dallo sviluppo in serie

$$X = x + i\frac{dy}{ds} + \frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + I\right)$$

$$Y = y + i\frac{dy}{ds} + \frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + I_1\right)$$

ed insieme

$$\mathrm{x} = x + i\frac{dx}{ds}, \qquad \mathrm{y} = y + i\frac{dy}{ds}$$

Chiamiamo adesso k la distanza fra punti (X, Y), (x, y), avremo

$$k = \left((X - x)^2 + (Y - y)^2 + 2(X - x)(Y - y)\cos A\right)^{\frac{1}{2}}$$

Quindi per la sostituzione dei valori si otterrà

$$k = \frac{i^2}{2}\left(\left(\frac{d^2x}{ds^2} + I\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} + I_1\right)^2\right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{d^2x}{ds^2} + I\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2} + I_1\right)\cos A\right)^{\frac{1}{2}}$$

e per conseguenza

$$\left(\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + 2\,\frac{d^2x}{ds^2}\,\frac{d^2y}{ds^2}\cos A\right)^{\frac{1}{2}} = \lim\frac{2k}{i^2}$$

Il primo membro è precisamente il rapporto fra l'unità, ed il raggio di curvatura, dunque in fine

$$\rho = \lim\frac{i^2}{2k}$$

Vale a dire il raggio di curvatura è eguale al limite del rapporto che si ottiene dal dividere il quadrato di una lunghezza infinitamente piccola egualmente portata sulla curva, e sulla tangente, per il doppio della distanza fra le due estremità.

150.° Riprendiamo ora in particolare le applicazioni dei raggi di curvatura per ciascuna curva del secondo ordine. In una parabola riferita ad assi ortogonali, e di parametro p, si ha

$$y^2 = px\,,\quad 2yy' = p\,,\quad y^3 y'' = -\frac{p^2}{4}$$

quindi il raggio di curvatura

$$\rho = -\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

porgerà per la parabola

$$p = \frac{(4x+p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}} = 4r\sqrt{\frac{r}{p}}$$

ove r rappresenta la distanza del fuoco dal punto (x, y). Da questa formola conosciamo che crescendo la x, cresce il raggio ρ, e per conseguenza la curvatura della parabola va sempre a diminuire procedendo dal vertice al di sopra, e al di sotto della curva: la supposizione di $x = o$ darà il minimo raggio, ossia la massima curvatura corrispondente al vertice ove il raggio ρ si riduce alla metà del parametro, e si confonde con la normale al medesimo punto. Volendo conoscere l'espressione del raggio ρ per un punto qualunque della parabola in funzione del parametro corrispondente al medesimo punto, basterà immaginare dal punto (x, y) un diametro parallelo all'asse, ed il nuovo parametro m, sarà

$$m = \frac{p}{\operatorname{sen}^2\varphi}$$

φ rappresenta secondo il consueto l' inclinazione della curva al punto (x, y) rapporto all'asse delle ascisse, ma al parag. 121.° fu veduto che

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{p}{4x+p} = \frac{p}{4r}$$

dunque in fine il raggio di curvatura in un punto qualunque della parabola ammetterà per valore

$$\rho = \frac{m}{2\operatorname{sen}\varphi}$$

La supposizione di $\varphi = 90°$, dà $m = p$, e si giunge di nuovo allo stesso risultato di già trovato per il vertice della curva parabolica. Il raggio di curvatura essendo indipendente dal sistema delle coordinate che si adotta, dovremo arrivare agli identici risultati, scegliendo una qualunque delle espressioni di sopra stabilite; così supponendo la parabola riferita a coordinate oblique e diametrali, e di parametro m, sarà egualmente

$$y^2 = mx\,, \quad yy' = \frac{m}{2}\,, \quad y^3 y'' = -\frac{m^2}{4}$$

quali sostituiti nella formola

$$\rho = -\frac{(1 + y'^2 + 2y' \cos A)^{\frac{3}{2}}}{y'' \operatorname{sen} A}$$

ricaveremo

$$\rho = \frac{(4y^2 + m^2 + 4\,my \cos A)^{\frac{3}{2}}}{2m^2 \operatorname{sen} A}$$

ovvero

$$\rho = \frac{\left((2y + m \cos A)^2 + m^2 \operatorname{sen}^2 A\right)^{\frac{3}{2}}}{2m^2 \operatorname{sen} A}$$

Qui l'uso delle coordinate oblique invece delle ortogonali si rende più vantaggioso: infatti avvertendo che l'origine delle coordinate è un punto qualunque della curva, così $x = o$, $y = o$ darà immediatamente

$$\rho = \frac{m}{2 \operatorname{sen} A}$$

l'angolo A coincide con l'angolo φ delle precedenti ricerche. Per giungere al medesimo risultato senza render nulle le x, ed y conviene introdurci il parametro n

della curva che passa per il punto (x, y) riferito a coordinate oblique, e diametrali, e si avrà

$$m = \frac{p}{\operatorname{sen}^2 A}, \quad n = \frac{p}{\operatorname{sen}^2 \varphi}, \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{y' \operatorname{sen} A}{1 + y' \cos A}$$

dalle quali

$$\frac{m}{n} = \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\operatorname{sen}^2 A}, \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{m \operatorname{sen} A}{2y + m \cos A}$$

d'onde

$$m = \frac{n \operatorname{sen}^2 \varphi}{\operatorname{sen}^2 A}, \quad 2y + m \cos A = \frac{m \operatorname{sen} A}{\operatorname{tang} \varphi} = \frac{n \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\operatorname{sen} A}$$

Questi valori sostituiti nell' espressione generica di ρ, somministrerà dopo brevi riduzioni

$$\rho = \frac{n}{2 \operatorname{sen} A}$$

Noi vedremo in appresso che la trovata espressione è comune a tutte le linee del second'ordine.

151.° Consideriamo un'ellissi con l'origine al centro riferita ad assi principali e di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

quindi dalla derivazione

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}, \quad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

quali valori sostituiti nel raggio di curvatura

$$\rho = -\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

verrà

$$\rho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$$

ed eliminando la y^2 per mezzo dell'equazione della curva, ed introducendo le note sostituzioni

$$c^2 = a^2 - b^2, \qquad c = ae$$

si ridurrà ad

$$\rho = \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

È facile di vedere ora che il secondo membro esprime il cubo della normale diviso per il quadrato della metà del parametro

$$p = \frac{2b^2}{a}$$

come già si era dimostrato; dalla medesima formola si scorge che il raggio ρ diminuisce al crescer della x, e perciò supponendo $x = 0$, ed $x = \pm a$ otterremo il massimo, e minimo raggio di curvatura ai vertici dell'asse minore, e maggiore: così per $x = \pm a$ risulterà il minimo raggio

$$\rho = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}$$

Nello stesso modo l'ipotesi di $x = 0$, porgerà il massimo raggio di curvatura ai vertici dell'asse minore, ove l'ellissi gode della minima curvatura, e perciò in questi punti

$$\rho = \frac{a^2}{b} = \frac{p_1}{2}$$

p_1 indica il parametro $\dfrac{2a^2}{b}$.

La forma semplicissima che il raggio di curvatura assume ai vertici dell' ellissi si estende anche ad un suo punto qualunque ; ed infatti sia a' il semidiametro che dal centro si conduce al punto (x, y) e b' il suo conjugato, h la consueta perpendicolare abbassata dal centro sulla direzione della tangente, A, l'inclinazione dei semidiametri a', b' obliqui e conjugati, si avrà dalle cognite proprietà dell'ellissi

$$ab = a' b' \text{ sen A} = b'h\,, \quad \text{ed} \quad h = a' \text{sen A}$$

ma è stato dimostrato, che

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}$$

dunque

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{h^3} = \frac{b'^2}{h}$$

La nuova espressione è simile a quella di già ottenuta ai vertici della curva; sostituendo infine il valore di h, e ponendo per il nuovo parametro m, dei semidiametri a', b'

$$m = \frac{2b'^2}{a'}$$

si trova

$$\rho = \frac{m}{2\text{senA}}$$

Questo risultato, come già fu veduto è comune con la parabola. Qui pure l'uso delle coordinate oblique, e diametrali ci fa giungere più direttamente al medesimo valore; infatti se a', b' sieno due semiassi obliqui, e diametrali congiunti ad angolo A, l' equazione dell' ellissi

riferita a questo nuovo sistema di coordinate sarà sempre della forma

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$$

d'onde

$$y'=-\frac{b'^2}{a'^2}\frac{x}{y}\ ,\quad y''=-\frac{b'^4}{a'^2 y^3}$$

Sostituiti questi valori nella formola

$$\rho=-\frac{(1+y'^2+2y'\cos A)^{\frac{3}{2}}}{y''\mathrm{sen}A}$$

verrà

$$\rho=\frac{(a'^4 y^2+b'^4 x^2-2a'^2 b'^2 xy\cos A)^{\frac{3}{2}}}{a'^4 b'^4 \mathrm{sen}\,A}$$

Ora è evidente che gli estremi degli assi $2a'$, $2b'$ rappresentano punti qualunque della curva, quindi facendo $x=a'$, ed $y=o$, avremo per il raggio di curvatura nell'estremo del semiasse a'

$$\rho=\frac{b'^2}{a'\mathrm{sen}\,A}$$

Per mostrare vieppiù l'uso delle differenti espressioni del raggio di curvatura, riprendiamo la formola generale

$$\rho=\frac{rdr}{dh}$$

Nell'ellissi ritenendo che a', b' sieno due semidiametri obliqui, e conjugati, potremo prendere per la distanza r condotta dal centro ad un punto della curva, $r=a'$, e siccome dalle proprietà dell'ellissi

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2\ ,\quad ab=b'h=h\sqrt{a^2+b^2-a'^2}$$

così avremo

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - a'^2}}$$

e per conseguenza

$$\rho = \frac{a'\mathrm{d}a'}{\mathrm{d}h} = \frac{a^2 + b^2 - a'^2}{h} = \frac{b'^2}{h}$$

Questo risultato è identico a quello di già determinato per altre considerazioni.

152.° Un'iperbola con l'origine al centro, e di semiassi principali a, b, avrà per equazione fra le coordinate ortogonali x, y

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Eseguendo le derivazioni, troviamo

$$y' = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\ ,\quad y'' = -\frac{b^4}{a^2\, y^3}$$

Sostituendo questi valori nell'espressione del raggio di curvatura, a coordinate ortogonali sarà come per l'ellissi

$$\rho = \frac{(a^4\, y^2 + b^4\, x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4\, b^4}$$

Eliminando la y^2 per mezzo dell'equazione della curva, e facendo la sostituzione di

$$c^2 = a^2 + b^2\ ,\quad c = ae$$

verrà

$$\rho = \frac{(e^2\, x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

Da questa formola si vede che il raggio di curvatura ρ cresce all'aumentare della x, a partir da $x = \pm a$, e perciò la curvatura dell'iperbola diminuisce dai vertici al di sopra e al di sotto dell'asse delle ascisse : ponendo perciò $x = \pm a$, risulta per i vertici dell'asse maggiore il minimo raggio di curvatura

$$\rho = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}$$

per la supposizione di $x = 0$, il raggio ρ diviene immaginario, come d'altronde è chiaro. Se come si è fatto nell'ellissi, sia a' un semidiametro che dal centro dell' iperbola va al punto (x, y), b' il semiasse conjugato, abbiamo per il significato delle consuete notazioni

$$ab = a' b' \text{ sen } A = b'h \,, \quad \text{ed} \quad h = a' \text{sen } A$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}$$

e perciò il raggio di curvatura si trasformerà in

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{h^3} = \frac{b'^2}{h} = \frac{b'^2}{a' \text{sen } A}$$

ovvero

$$\rho = \frac{m}{2 \text{sen} A}$$

Quando la curva si riferisca ai due semidiametri obliqui a', b' e conjugati l'equazion della curva avrà sempre la forma

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

ed il raggio di curvatura verrà espresso da

$$\rho = \frac{(a'^4 y^2 + b'^4 x^2 + 2a'^2 b'^2 xy \cos A)^{\frac{3}{2}}}{a'^4 b'^4 \operatorname{sen} A}$$

Qui pure l'ipotesi di $y = o$, $x = \pm a'$, darà per un punto qualunque dell'iperbola il raggio

$$\rho = \frac{b'^2}{a' \operatorname{sen} A}$$

Infine se nella formola generale

$$\rho = \frac{r dr}{dh}$$

si prenda $r = a'$, ed insieme dalle note proprietà dell'iperbola

$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, $ab = b'h = h\sqrt{a'^2 - a^2 + b^2}$
otterremo per la differenziazione

$$\rho = \frac{a' d a'}{dh} = \frac{a'^2 - a^2 + b^2}{h} = \frac{b'^2}{h}$$

Tal'è l'espressione comune a tutte le linee del secondo ordine.

153.° Noi finiremo di parlare dei raggi di curvatura, e del circolo osculatore col far conoscere le condizioni analitiche, onde il raggio ρ divenga massimo, o minimo, e col dimostrare ancora che il circolo osculatore è il limite verso il quale converge il circolo che passa per tre punti infinitamente vicini di una curva.

Se consideriamo l'espressione quadrata del raggio ρ, cioè

$$\rho^2 = \frac{(1 + y'^2 + 2y' \cos A)^3}{y''^2 \operatorname{sen}^2 A}$$

e si eseguisca una derivazione rapporto ad x, avremo

$$\frac{d\rho^2}{dx}=2\frac{(1+y'^2+2y'\cos A)^2}{y''^3 \operatorname{sen}^2 A}\left(3y''^2(y'+\cos A)-y'''(1+y'^2+2y'\cos A)\right)$$

Ora per la condizione del massimo, e del minimo si ricaverà

$$3y''^2(y'+\cos A)-y'''(1+y'^2+2y'\cos A)=o$$

Nell'ipotesi degli assi ortogonali si riduce ad

$$3y'y''^2-y'''(1+y'^2)=o$$

Noi vedremo che questa stessa condizione dovrà aver luogo, onde il circolo osculatore sia in un determinato punto di una curva data ad un contatto del terz' ordine. Così prendendo una parabola di equazione

$$y^2=px$$

si ha

$$y'=\frac{p}{2y},\quad y''=-\frac{p^2}{4y^3},\quad y'''=\frac{3p^3}{8y^5}$$

d'onde supponendo gli assi ortogonali, la proposta condizione diviene

$$4y^2+p^2=p^2$$

alla quale non si può soddisfare che per $y=o$ ed $x=o$, e perciò all'origine delle coordinate, ossia nel vertice della parabola, corrisponde il minimo raggio di curvatura, come già si conosce; nella stessa guisa per l'ellissi, e per l'iperbola ai vertici dell' asse maggiore corrisponderà il minimo raggio di curvatura. Sieno ora (x, y) le coordinate di un punto qualunque di una data curva, $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, $(x+2\Delta x+\Delta^2 x, y+2\Delta y+\Delta^2 y)$ le coordinate di due altri punti infinitamente vicini,

ed X, Y le coordinate del centro del circolo che passa per questi tre punti, e ρ, il raggio; nell' ipotesi degli assi rettangolari avremo le tre equazioni

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=\rho^2$$

$$(x-X+\Delta x)^2+(y-Y+\Delta y)^2=\rho^2$$

$$(x-X+2\Delta x+\Delta^2 x)^2+(y-Y+2\Delta y+\Delta^2 y)^2=\rho^2$$

Sviluppando le ultime due otterremo le equazioni di condizione

$$2(x-X)\,\Delta x+2(y-Y)\,\Delta y+\Delta x^2+\Delta y^2=0$$

$$2(x-X)\,(2\Delta x+\Delta^2 x)+(2\Delta x+\Delta^2 x)^2$$
$$+2(y-Y)\,(2\Delta y+\Delta^2 y)+(2\Delta y+\Delta^2 y)^2=0$$

Quest' ultima in forza della sua antecedente si ridurrà ancora ad

$$2(X-x)\,\Delta^2 x+2\,(y-Y)\,\Delta^2 y+2\,(\Delta x^2+\Delta y^2)$$
$$+4\,(\Delta x\,\Delta^2 x+\Delta y\,\Delta^2 y)+(\Delta^2 x)^2+(\Delta^2 y)^2=0$$

Dividendo respettivamente le due equazioni di condizioni per gli infinitesimi α, ed α^2 ed osservando che nel limite

$$dx=\lim\frac{\Delta x}{\alpha},\ \ldots\ d^2x=\lim\frac{\Delta^2 x}{\alpha^2},\ \ldots$$

avremo ai limiti le tre equazioni

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=\rho^2$$

$$(x-Y)\,dx+(y-Y)\,dy=0$$

$$(x-X)\,d^2x+(y-Y)\,d^2y+dx^2+dy^2=0$$

Eliminando dalle ultime due le differenze $x-X$, $y-Y$ e sostituite nel secondo membro di ρ^2, otterremo la nota espressione del raggio di curvatura nel sistema degli assi ortogonali.

Determinazione analitica del centro di curvatura di una curva piana. Teoria delle evolute, e delle evolventi.

154.° Sia secondo le usate notazioni, ρ il raggio di curvatura di una curva piana corrispondente al punto (x, y), e sieno X, Y le coordinate del centro del circolo osculatore, e che si ridurranno per ciascun punto della curva data alle coordinate dell' estremità del raggio ρ portato sulla direzione della normale a partir dal punto (x, y), e dalla parte, ove la curva volge la sua concavità; ed avremo in generale una prima equazione

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + 2(X - x)(Y - y)\cos A = \rho^2$$

Ove il raggio ρ essendo sulla direzione del normale, sarà egualmente per la sua equazione come dal parag. 115

$$(X - x)(dx + dy\cos A) + (Y - y)(dy + dx\cos A) = 0$$

dalla quale

$$\frac{Y - y}{dx + dy\cos A} = \frac{X - x}{-(dy + dx\cos A)}$$

$$= \pm\frac{\left((X - x)^2 + (Y - y)^2 + 2(X - x)(Y - y)\cos A\right)^{\frac{1}{2}}}{\left((dx + dy\cos A)^2 + (dy + dx\cos A)^2 - 2(dx + dy\cos A)(dy + dx\cos A)\cos A\right)^{\frac{1}{2}}}$$

e che si ridurrà con facilità ad

$$\frac{Y - y}{dx + dy\cos A} = \frac{X - x}{-(dy + dx\cos A)} = \frac{\rho}{\operatorname{sen} A\, ds}$$

Da questa equazione potremo determinare i valori delle coordinate X, Y, o delle differenze $X - x$, $Y - y$ dopo

di aver sostituito una qualunque delle espressioni trovate dal raggio di curvatura ρ; così prendendo

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

avremo simultaneamente

$$\frac{Y-y}{dx+dy\cos A} = \frac{X-x}{-(dy+dx\cos A)} = \frac{1}{d\varphi \operatorname{sen} A}$$

d'onde

$$Y-y = \frac{dx+dy\cos A}{d\varphi \operatorname{sen} A}, \quad X-x = -\frac{(dy+dx\cos A)}{d\varphi \operatorname{sen} A}$$

Tali sono l'equazioni dalle quali si ottengono i valori delle coordinate X, Y del centro di curvatura corrispondente al punto (x, y) della curva data; nel sistema degli assi ortogonali, si avrà soltanto

$$Y-y = \frac{dx}{d\varphi}, \quad X-x = -\frac{dy}{d\varphi}$$

Nella stessa guisa scegliendo la x, per variabile indipendente, e prendendo in generale

$$\rho = \pm \frac{(1+y'^2+2y'\cos A)^{\frac{3}{2}}}{y''\operatorname{sen} A}$$

ed insieme

$$ds = dx\,(1+y'^2+2y'\cos A)^{\frac{1}{2}}$$

otterremo per le coordinate X, Y del centro

$$Y-y = \frac{(1+y'\cos A)(1+y'^2+2y'\cos A)}{y''\operatorname{sen}^2 A}$$

$$X-x = -\frac{(y'+\cos A)(1+y'^2+2y'\cos A)}{y''\operatorname{sen}^2 A}$$

Queste ancora nell'ipotesi degli assi ortogonali si riducono ad

$$Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad X - x = -\frac{y'}{y''}(1 + y'^2)$$

Infine prendendo

$$\rho = \pm \frac{(dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A)^{\frac{3}{2}}}{(dx\, d^2y - dy\, d^2x) \operatorname{sen} A}$$

si ricaverà con facilità

$$Y - y = \frac{(dx + dy \cos A)(dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A)}{(dx\, d^2y - dy\, d^2x) \operatorname{sen}^2 A}$$

$$X - x = -\frac{(dy + dx \cos A)(dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A)}{(dx\, d^2y - dy\, d^2x) \operatorname{sen}^2 A}$$

Queste formole hanno luogo qualunque sia la scelta della variabile indipendente. Moltiplichiamo adesso la prima per $d^2y + d^2x \cos A$, e la seconda per $d^2x + d^2y \cos A$ e facciamo in appresso la somma, otterremo

$$(X - x)(d^2x + d^2y \cos A) + (Y - y)(d^2y + d^2x \cos A)$$
$$= dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A$$

Riunendo quest'ultima formola al valore di ρ^2, ed alla equazione della normale, potremo dire che per ottenere i valori delle tre incognite Y, Y, ρ, basterà risolvere il sistema delle tre equazioni simultanee

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + 2(X - x)(Y - y) \cos A = \rho^2$$
$$(X - x)(dx + dy \cos A) + (Y - y)(dy + dx \cos A) = 0$$
$$(X - x)(d^2x + d^2y \cos A) + (Y - y)(d^2y + d^2x \cos A)$$
$$-(dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A) = 0$$

Nel sistema delle coordinate rettangolari si ha semplicemente

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = \rho^2$$

$$(X - x)\, dx + (Y - y)\, dy = 0$$

$$(X - x)\, d^2x + (Y - y) d^2y - dx^2 - dy^2 = 0$$

È importante di osservare che le ultime due per ciascun sistema provengono da una successiva differenziazione della prima, considerando le X, Y, ρ come costanti.

155.° Passando ora dal punto (x, y) della curva data ai successivi punti della medesima, varieranno non solamente le coordinate x, y, ma ben anche le coordinate X, Y del centro di curvatura, quindi immaginando un movimento continuo del punto (x, y) sulla stessa curva, si descriverà egualmente dal punto (X, Y) una nuova curva, la quale non sarà altro, che il luogo geometrico dei centri di curvatura della linea proposta. È facile poi di scuoprire diverse proprietà di questa curva. Così differenziando il valore di ρ^2 rapporto a tutte le variabili x, y, X, Y, ed avvertendo all'equazione della normale, sarà primieramente

$$(X - x)\, (dX + dY \cos A) + (Y - y)\, (dY + dX \cos A) = \rho d\rho$$

Di più si eseguisca una differenziazione nell' equazione della normale, avremo

$$(X - x)\, (d^2x + d^2y \cos A) + (Y + y)\, (d^2y + d^2x \cos A)$$

$$+ (dX - dx)\, (dx + dy \cos A) + (dY - dy)\, (dy + dx \cos A) = 0$$

la quale in forza dell'ultima equazione del primo sistema ottenuto alla fine dell'antecedente parag. si ridurrà

$$dX\, (dx + dy \cos A) + dY\, (dy + dx \cos A) = 0$$

Quest'ultima equazione ci dice che le rette tangenti alla

curva proposta nel punto (x, y), ed alla linea dei centri nel corrispondente punto (X, Y) s'incontrano ad angolo retto, e per conseguenza il raggio di curvatura è sempre tangente alla linea dei centri nei rispettivi suoi punti (X, Y); ciò si scorge ancora dall'osservare che la combinazione di quest'ultima formola con l'equazione della normale porge immediatamente l'equazione

$$\frac{X - x}{dX} = \frac{Y - y}{dY}$$

la quale appartiene alla retta tangente la linea dei centri nel punto (X, Y). Sia S un'arco della linea dei centri compreso fra un punto fisso, ed il punto (X, Y), si avrà

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + 2dX\, dY \cos A$$

Inoltre dalla relazione trovata fra i differenziali dx, dy, dX, dY, si ricava

$$\frac{dx + dy \cos A}{dY} = \frac{dy + dx \cos A}{- dX}$$

della quale il valor comune è

$$\frac{dx + dy \cos A}{dY} = \frac{dy + dx \cos A}{- dX} = \frac{ds \operatorname{sen} A}{dS}$$

e perciò

$$dx + dy \cos A = ds \operatorname{sen} A \frac{dY}{dS}$$

$$dy + dx \cos A = -ds \operatorname{sen} A \frac{dX}{dS}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione della normale

$$\frac{Y - y}{dy + dy \cos A} = \frac{X - x}{-(dy + dx \cos A)} = \frac{\rho}{\operatorname{sen} A\, ds}$$

otterremo

$$Y - y = \rho \frac{dY}{dS}, \quad X - x = \rho \frac{dX}{dS}$$

Se queste stesse differenze $Y - y$, $X - x$, si sostituiscano nel secondo membro della trovata espressione di $\rho d\rho$, verrà con facilità

$$dS = d\rho$$

ciò che porge

$$\rho = S + c$$

Vale a dire il raggio di curvatura è sempre eguale al corrispondente arco della linea dei centri, o da esso ne differisce di una quantità costante.

156.° Premesse queste proprietà della linea dei centri immaginiamo attorno alla medesima curva un filo inestensibile, il quale la ricuopra totalmente, o ne differisca di una data linea retta, se svolgiamo questo filo in modo che un estremità rimanga sempre tangente alla curva dei centri nei successivi suoi punti, l'altra estremità descriverà la linea proposta; la curva che col suo svolgimento genera una seconda curva si chiama *evoluta*, come la generata si dirà *evolvente*. L'equazione dell'evoluta si determina dalla combinazione di due dell'espressioni delle differenze

$$Y - y, \quad X - x$$

stabilite nel parag. 154; cioè riducendo i valori di X, Y a funzioni di una sola variabile per mezzo dell' equazione della linea data; si eseguirà un eliminazione di questa, per cui restando una sola relazione fra X, Y apparterrà evidentemente all' equazione della linea dei centri, o dell'evoluta. Per facilitare le applicazioni sceglieremo in particolare le espressioni

$$Y - y = \frac{dx}{d\varphi}, \quad X - x = -\frac{dy}{d\varphi}$$

od anche

$$Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad X - x = -\frac{y'}{y''}(1 + y'^2)$$

le quali tutte sussistono nel sistema degli assi ortogonali. Viceversa data l'equazione fra le coordinate X, Y della evoluta si potrebbero determinare i valori delle x, y atti a rappresentare l'equazione della *evolvente*; infatti riprendendo il sistema di equazioni

$$Y - y = \rho \frac{dY}{dS}, \quad X - x = \rho \frac{dX}{dS}, \quad \rho = S + c$$

avremo

$$x = X - (S + c) \frac{dX}{dS}, \quad y = Y - (S + c) \frac{dY}{dS}$$

Riducendo il secondo membro a funzione di una sola variabile, si avrà dall'eliminazione di questa, una relazione fra x, y, che rappresenterà l'equazione della curva *evolvente*; la risoluzione di questo problema dipende però dal Calcolo Integrale, onde poter determinare l' arco S della evoluta, quindi è che da noi le applicazioni si riserveranno nel Calcolo Integrale, e potrà intanto consultarsi una mia Memoria pubblicata nel 1839 (*), e che trovasi ancora recentemente stampata nel tom. 26 del giornale di Matematica, che si pubblica in Berlino dal sig. Crelle.

157.° Supponiamo pertanto che vogliasi determinare l'evoluta della parabola di secondo ordine; si avrà come già abbiamo più volte osservato

$$y^2 = px, \quad y' = \frac{p}{2y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{4y^3}$$

d'onde supposti gli assi ortogonali, le differenze $X - x$, $Y - y$, ottenute nell'antecedente paragrafo diverranno

$$Y - y = -\left(\frac{4y^3}{p} + y\right), \quad X - x = 2x + \frac{p}{2}$$

(*) Giornale Arcadico vol. 79.

dalle quali

$$x = \frac{1}{3}\left(X - \frac{p}{2}\right), \qquad Y^2 = \frac{16x^3}{p}$$

ed eliminando la x, risulterà

$$Y^2 = \frac{16}{27p}\left(X - \frac{p}{2}\right)^3$$

Tal'è l'*evoluta* della parabola, e suol chiamarsi *parabola cubica*, mentre la sua equazione rappresenta una linea del terzo ordine, ed è inclusa nella classe delle curve paraboliche. A questa medesima equazione siam giunti al parag. 121 nel cercare il luogo geometrico dei punti dai quali si possono condurre due normali alla parabola; la supposizione di $Y = o$, dà $X = \frac{p}{2}$, ciò indica che la curva evoluta ha la sua origine sull'asse della parabola ad una distanza del vertice, eguale alla metà del parametro: questa conseguenza si deduce anche dal riflettere che al vertice della parabola, il raggio di curvatura è precisamente eguale alla metà del parametro p; e perciò è facile il concludere che fra il raggio di curvatura ρ della parabola, e l'arco S della evoluta compreso fra il punto $Y = o$, $X = \frac{p}{2}$, ed un punto variabile, avrà luogo l'equazione

$$\rho = S + \frac{p}{2}$$

Di più l'evoluta della parabola è composta di due rami infiniti eguali, e simili, i quali volgono la loro convessità verso l'asse della parabola, ed il punto $Y = o, X = \frac{p}{2}$ è un punto di regresso di prima specie, ove la retta tangente confondendosi con l'asse delle ascisse, sarà perpendicolare all'asse delle ordinate.

in un'ellissi determinata dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

si ha per le derivate

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\ ,\quad y''=-\frac{b^4}{a^2\,y^3}$$

quindi l'equazioni dell'*evoluta* diverranno

$$X-x=-\frac{x}{a^4\,b^2}(a^4y^2+b^4x^2),\quad Y-y=\frac{y}{b^4\,a^2}(a^4y^2+b^4x^2)$$

Per eseguire più facilmente l'eliminazione si prendano dall'equazione della curva i valori di x^2, y^2, cioè

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}\,(b^2-y^2),\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}\,(a^2-x^2)$$

e sostituendo il primo nella seconda, ed il secondo nella prima, e ponendo

$$a^2-b^2=c^2$$

troveremo

$$X=\frac{c^2\,x^3}{a^4}\ ,\quad Y=-\frac{c^2\,y^3}{b^4}$$

dalle quali

$$\frac{aX}{c^2}=\frac{x^3}{a^3}\ ,\qquad \frac{bY}{c^2}=-\frac{y^3}{b^3}$$

ovvero

$$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{x}{a}\ ,\quad \left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}=-\frac{y}{b}$$

Eseguendo i quadrati, e sommando, risulterà evidente-

mente per l'equazione della evoluta dell'ellissi

$$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Tal'è l'equazione che abbiamo trovata nel parag. 122 per determinare il luogo geometrico dei punti dai quali si possono condurre tre normali all'ellissi. Questa curva incontra l'asse delle x a due eguali distanze dal centro espresse per

$$X = \frac{c^2}{a} = a - \frac{b^2}{a}, \quad X = -\left(a - \frac{b^2}{a}\right)$$

ed incontra l'asse delle y a due distanze parimenti eguali, e che sono

$$Y = \frac{c^2}{b} = \frac{a^2}{b} - b, \quad Y = -\frac{c^2}{b} = b - \frac{a^2}{b}$$

Quindi è che le respettive distanze di questi quattro punti, dai vertici dell'asse maggiore, e dell'asse minore saranno

$$a - X = \frac{b^2}{a}, \quad b - Y = \frac{a^2}{b}$$

le quali coincidono con i raggi di curvatura ai medesimi vertici. La curva è dunque formata di quattro rami eguali e simili, e similmente situati rapporto al centro dell'ellissi, e volgono tutti la loro convessità verso l'asse delle ascisse e delle ordinate; di più nei punti

$$Y = o, \quad X = \pm\left(a - \frac{b^2}{a}\right)$$

l'asse delle ascisse è tangente alla curva, e nei punti

$$X = o, \quad Y = \pm\left(b - \frac{a^2}{b}\right)$$

l'asse delle ordinate si confonde con la retta tangente. All'equazione dell'evoluta dell'ellissi si giunge anche con la medesima facilità, facendo uso di altre formole. Così riprendendo le formole

$$X - x = -\frac{dy}{d\varphi}, \quad Y - y = \frac{dx}{d\varphi}$$

ed osservando che l'equazione dell'ellissi può essere rappresentata dai due sistemi

$$x = a \cos v, \quad y = b \operatorname{sen} v$$

come già abbiamo veduto nel parag. 122, avremo

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad dx = -a \operatorname{sen} v\, dv, \quad dy = b \cos v\, dv$$

e perciò

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{b}{a} \cot v$$

d'onde dalla differenziazione, ed eliminazione di tangφ, verrà

$$d\varphi = \frac{ab\,dv}{a^2 \operatorname{sen}^2 v + b^2 \cos^2 v}$$

Con questi valori, le differenze $X - x$, $Y - y$ diverranno

$$X - a \cos v = \frac{\cos v\,(a^2 \operatorname{sen}^2 v + b^2 \cos^2 v)}{a}$$

$$Y - b \operatorname{sen} v = \frac{\operatorname{sen} v\,(a^2 \operatorname{sen}^2 v + b^2 \cos^2 v)}{b}$$

dalle quali

$$Y = \frac{(a^2 - b^2)}{b} \operatorname{sen}^3 v, \quad X = -\frac{(a^2 - b^2)}{a} \cos^3 v$$

quindi

$$\left(\frac{bY}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\text{sen } v,\ \left(\frac{aX}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{3}}=-\cos v$$

Elevando al quadrato, e sommando verrà

$$\left(\frac{aX}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{bY}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

la quale coincide con quanto si è di già trovato per altre considerazioni.

Nello stesso modo prendendo un'iperbola di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

e ponendo

$$a^2+b^2=c^2$$

si troverà, con ripetere i medesimi calcoli di già eseguiti per l'ellissi per l'equazione della sua evoluta

$$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

Questa equazione, come già abbiamo veduto nel paragrafo 123 rappresenterà il luogo geometrico dei punti dai quali si possono condurre tre normali all'iperbola. La ritrovata curva incontra l'asse delle ascisse a due eguali distanze dal centro espresse per

$$X=\pm\frac{c^2}{a}=+\left(a+\frac{b^2}{a}\right)$$

non potrà mai incontrare l'asse delle ordinate, come si vede dalla medesima equazione, nella quale l'ordinata Y diviene immaginaria per $X=o$.

158.° Per mostrare una qualche applicazione alle curve trascendenti, consideriamo primieramente una cicloide con l'origine delle coordinate al vertice della base, per la quale si verifica

$$dx = dy \sqrt{\frac{y}{2a - y}}$$

$$y' = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}\,, \quad y'' = -\frac{a}{y^2}$$

quindi per le coordinate X, Y del centro di curvatura, avremo dalle consuete equazioni

$$Y - y = -2y\,, \quad X - x = 2y \sqrt{\frac{2a - y}{y}}$$

ovvero

$$Y = -y\,, \quad X - x = 2\,(2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Per eseguire l'eliminazione delle x, y, sarà utile di richiamare i loro valori espressi dalle equazioni finite

$$x = a\,(u - \text{sen}\,u)\,, \quad y = a\,(1 - \cos u)$$

dalla seconda delle quali

$$a\,\text{sen}\,u = (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

e perciò, prendendo l'assoluto valore della Y otterremo per le coordinate X, Y

$$X = a(u + \text{sen}\,u)\,, \quad Y = a(1 - \cos u)$$

La coesistenza di queste due equazioni appartiene ad una cicloide, nella quale $2a$ esprime il raggio del circolo generatore, e perciò l'evoluta della cicloide è un' altra cicloide eguale, e simile alla evolvente, od in altri termini la cicloide è una curva evoluta di se stessa.

Prendiamo ancora una spiral logaritmica determinata dall'equazione

$$\text{arc tang}\,\frac{x}{y} = a \log \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}$$

si avrà

$$y' = \frac{y+ax}{x-ay},\quad y'' = \frac{a(1+a^2)(x^2+y^2)}{(x-ay)^3}.$$

Con questi valori otterremo

$$Y - y = \frac{x-ay}{a},\quad X - x = -\frac{(y+ax)}{a}$$

d'onde

$$Y = \frac{x}{a},\quad X = -\frac{y}{a}$$

dalle quali

$$x = aY,\quad y = -aX$$

Sostituendo i valori di x, y nell'equazione della curva, verrà

$$-\text{arc tang}\,\frac{Y}{X} = a \log \left(\frac{a\sqrt{X^2+Y^2}}{R}\right)$$

la quale avvertendo all'equazione

$$\text{arc tang}\,\frac{X}{Y} + \text{arc tang}\,\frac{Y}{X} = \frac{\pi}{2}$$

avremo in fine

$$\text{arc tang}\,\frac{X}{Y} - \frac{\pi}{\pi} - a \log a = a \log \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{R}$$

È facile di vedere che questa equazione rappresenta una nuova spirale logaritmica delle medesime dimensioni che l'antecedente, e perciò, come accade nella cicloide, dallo

svolgimento della spiral logaritmica si genera una nuova spirale logaritmica eguale, e simile alla sua evoluta; noi riprodurremo la dimostrazione di questa proprietà, quando parleremo delle curve riferite a coordinate polari.

Sul contatto delle curve piane, e sui differenti ordini del medesimo.

159.° Consideriamo due curve piane rappresentate dall'equazioni

$$y = f(x), \qquad y = F(x)$$

fra le coordinate x, y o rettangolari, od oblique. Se queste due curve s'incontrano in uno, o più punti, si verificherà allora l'equazione

$$f(x) = F(x)$$

ed il numero delle radici reali di questa equazione indicherà il numero dei punti d' intersezione. Chiamando poi h un incremento infinitesimo dell'ascissa x, si avrà

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

$$F(x+h) = F(x) + h\,F'(x+\theta_1 h)$$

delle quali la differenza sarà

$$f(x+h) - F(x+h) = h\,[\,f'(x+\theta h) - F'(x+\theta_1 h)\,]$$

I numeri θ, θ_1 sono compresi fra zero, e l'unità; l'incremento h si può prendere piccolo in modo che il segno della differenza

$$f'(x+\theta h) - F'(x+\theta_1 h)$$

coincida con il segno della differenza delle funzioni

$$f'(x) - F'(x).$$

In quest'ipotesi la differenza delle due ordinate variate, cangierà di segno con la h, per cui la seconda curva intersecherà la prima. Supponiamo adesso che le due curve date si tocchino in un determinato punto (x, y) in modo da aver la retta tangente commune, allora si dice che le due curve ammettono fra di loro in questo punto un contatto, ove si verificherà evidentemente

$$f'(x) = F'(x).$$

Il *contatto* in proposito si chiama di *primo ordine*; in questo caso è facile il vedere che la differenza delle due ordinate corrispondenti all'ascissa $x + h$, sarà della forma

$$f(x+h) - F(x+h) = \frac{h^2}{1.2}\left(f''(x+\theta h) - F''(x+\theta_1 h)\right)$$

I nuovi numeri θ, θ_1 sempre $> o$, e < 1. Qui pure si potrà sempre ottenere per valori piccolissimi di h, che le due differenze

$$F''(x) - F''(x), \quad f''(x + \theta h) - F''(x + \theta_1 h)$$

conservino il medesimo segno, dunque allora la differenza

$$f(x + h) - F(x + h)$$

rimarrà invariabile al cangiar di segno della h, e perciò la seconda curva che trovasi con la prima nel punto (x, y) ad un contatto di primo ordine cesserà d'incontrarla.

160.° Supponiamo inoltre, che in un determinato punto (x, y) delle due curve oltre le condizioni

$$f(x) = F(x), \qquad f'(x) = F'(x)$$

sussista ancora

$$f''(x) = F''(x)$$

si dirà che le due curve hanno in questo punto un *contatto* di *second'ordine*; qui pure la differenza delle due ordinate corrispondenti alla ascissa $x + h$, sarà

$$f(x+h) - F(x+h) = \frac{h^3}{1.2.3}\left(f'''(x+\theta h) - F'''(x+\theta_1 h)\right)$$

e per le medesime ragioni di già riportate la differenza

$$f(x+h) - F(x+h)$$

varierà al cangiar di segno della h, e per conseguenza nel contatto di secondo ordine le due curve si traverseranno toccandosi. Come già abbiamo veduto, il raggio di curvatura dipende dalle funzioni derivate del primo e second'ordine dell'ordinata y, quindi il circolo osculatore si troverà in generale ad un contatto di secondo ordine nei differenti punti di una curva piana, in modo che avrà la proprietà di toccare, e di segare insieme la curva in tutti quei punti ove l'ordine del contatto non divenga superiore a 2. Due curve pertanto che sono fra di loro in un determinato punto ad un contatto di secondo ordine avranno la medesima retta tangente, il medesimo circolo osculatore, e si diranno curve *osculatrici* quantunque possa accadere che due curve sieno osculatrici, e pur tuttavia il loro contatto appartenga ad un ordine superiore al secondo; aggiungiamo di più che due curve osculatrici volgeranno la loro concavità dalla medesima parte; ed il contatto prende il nome di *osculazione*. Nello stesso modo se alle antecedenti condizioni dell'eguaglianza delle funzioni, e delle derivate del primo, e second'ordine, si aggiunga

$$f'''(x) = F'''(x)$$

il *contatto* delle curve si dirà del *terzo ordine* e la solita differenza delle ordinate corrispondenti all'ascissa $x+h$ si esprimerà per

$$f(x+h)-F(x+h)=\frac{h^4}{1.2.3.4}\left(f^{IV}(x+\theta h)-F^{IV}(x+\theta h)\right)$$

In questi punti le curve si toccano senza traversarsi. In generale diremo che se per un punto (x, y) comune a due curve date si verifica

$$f(x)=F(x)\,,\quad f'(x)=F'(x)\,,\quad f''(x)=F''(x)$$

$$\ldots\ldots f^{(n-1)}(x)=F^{(n-1)}(x)\,,\quad f^{(n)}(x)=F^{(n)}(x)$$

avranno queste un *contatto dell'ordine n*, nelle quali la consueta differenza delle ordinate rapporto all'ascissa $x+h$, sarà (*)

$$f(x+h)-F(x+h)=\frac{h^{n+1}}{1.2.3..n(n+1)}\left(f^{(n+1)}(x+\theta h)-F^{(n+1)}(x+\theta_1 h)\right)$$

Quando l'ordine del contatto appartiene ad un numero n pari, le due curve si traverseranno toccandosi, come per il numero n impari, le due curve si toccheranno solamente. É facile poi il concludere che se due curve sono fra di loro ad un contatto dell'ordine n, non vi potrà passare fra queste alcuna altra curva, la quale abbia con le medesime un contatto dello stesso ordine.

(*) Ai due numeri θ, θ_1 compreso fra zero, e l'unità, potrebbe sostituirsi un solo θ compreso fra i medesimi valori, osservando che la differenza

$$f(x+h)-F(x+h)$$

considerata come funzione delle h, è una funzione che con la sua derivata fino all'ordine $n$esimo svanisce per $h=0$, e perciò il suo valore si esprimerà per una formola data verso la fine del parag. 50.

161.° Se due curve ammettano in generale un contatto dell' ordine n, potrà questo in alcuni particolari punti variare, e ridursi ad un ordine più elevato: così il circolo osculatore tocca generalmente tutte le curve ad un contatto del secondo ordine, ma se consideriamo i vertici della parabola, dell'ellissi, e dell'iperbola, sono questi con il circolo osculatore ad un contatto del terzo ordine; infatti prendendo l'ascissa x per variabile indipendente, le coordinate X, Y del centro del circolo osculatore devono verificare nell'ipotesi degli assi ortogonali, come si è veduto nel parag. 154 le due condizioni

$$x - X + (y - Y)\,y' = o$$
$$1 + y'^2 + (y - Y)\,y'' = o$$

Proseguendo la derivazione sarà

$$(y - Y)y''' + 3y'y'' = o$$

ed eliminando fra le due ultime la differenza $y - Y$, otterremo

$$y'''(1 + y'^2) = 3y'y''^2$$

Tal'è la condizione analitica, che si dovrà verificare onde in un determinato punto di una curva data, il circolo osculatore la tocchi ad un contatto del terzo ordine. Questa stessa condizione coincide con quella che si è trovata al parag. 153, onde il raggio di curvatura divenga massimo, o minimo. Così in una parabola di equazione

$$y^2 = px$$

si ha

$$y' = \frac{p}{2y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{4y^3}, \quad y''' = \frac{3p^3}{8y^5}$$

d'onde la condizione diverrà

$$3p^3\,(4y^2 + p^2) = 3p^5$$

la quale non può sussistere a menò che non sia $y=o$ ed $x=o$, e perciò all'origine delle coordinate, ossia nel vertice della parabola, il circolo osculatore tocca la curva ad un contatto del terzo ordine.

In un ellissi con l'origine al centro, e di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

si avrà

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}, \quad y'''=-\frac{3b^6}{a^4}\frac{x}{y^5}$$

quali valori sostituiti nella consueta equazione fra y', y'', y''', ricaveremo

$$a^4y^2+b^4x^2=a^2b^4$$

ove eliminando la y^2 per mezzo dell' equazione della curva, si troverà

$$x^2=a^2, \qquad \text{ed} \qquad x=\pm a$$

e perciò ai vertici dell'asse maggiore dell'ellissi, il contatto della curva con il circolo osculatore sarà del terzo ordine, facendo poi un cangiamento di x in y, di a, in b, e viceversa si dimostrerà facilmente che il medesimo ordine di contatto avrà luogo nei vertici dell' asse minore ; infine la medesima proprietà si verificherà nei due vertici dell'asse maggiore dell'iperbola.

162.° Prendendo l'ordinata y funzione dell'ascissa x, si è veduto, che in un dato punto (x, y) due curve sono fra di loro ad un contatto dell'ordine n, quando le funzioni

$$y, \ y', \ y'', \ y''', \ \ldots \ y^{(n)}$$

conserveranno il medesimo valore nel passaggio da una

curva all' altra. Supponiamo ora che le due coordinate x, y sieno funzioni di una nuova quantità t presa come variabile indipendente, e che insieme la variabile t sia una funzione qualunque v delle due coordinate x, y, si avrà in generale

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad t = \mathrm{F}(x, y) = v$$

Se per brevità si ponga

$$x^{(m)} = \varphi^{(m)}(t)\,, \quad y^{(m)} = \psi^{(m)}(t)$$

e si eseguiscano delle differenziazioni successive nel valore di t, otterremo dividendo per dt, dt^2, dt^3, . . . le differenti equazioni a derivate parziali

$$1 = x'\mathrm{D}_x v + y'\mathrm{D}_y v$$

$$x'^2 \mathrm{D}_x^2 v + 2x' y' \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y v + y'^2 \mathrm{D}_y^2 v + x''\mathrm{D}_x v + y''\mathrm{D}_y v = 0$$

$$x'''\mathrm{D}_x v + x'^3 \mathrm{D}_x^3 v + y'''\mathrm{D}_y v + y'^3 \mathrm{D}_y^3 v + 3x'x'' \mathrm{D}_x^2 v$$
$$+ 3y'y''\mathrm{D}_y^2 v + 3\,(x''y' + x'y'')\mathrm{D}_x \mathrm{D}_y v$$
$$+ 3x'^2 y'^2 \left(\mathrm{D}_x^2 \mathrm{D}_y v + \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y^2 v \right) = 0$$

D'altronde per le formole del parag. 40 le funzioni derivate da y rapporto ad x, saranno

$$\mathrm{D}_x y = \frac{y'}{x'}\,, \quad \mathrm{D}_x^2 y = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}$$

$$\mathrm{D}_x^3 y = \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{x'^5}$$

Da tutte queste diverse espressioni si ricaveranno i va-

lori delle funzioni derivate

$$x', x'', x''', \ldots \; y', y'', y''', \ldots$$

date per le quantità

$$D_x y, D_x^2 y, D_x v, D_y v, D_x^2 v, D_y^2 v, D_x D_y v, \ldots$$

le quali ritenendo nel punto di contatto il medesimo valore, quando si passa da una curva ad un altra, ne verrà che i medesimi valori riterranno le derivate

$$x', x'', x''', \ldots \; y', y'', y''', \ldots$$

In differenti applicazioni la variabile t si riduce alla distanza r condotta dall'origine al punto (x, y), o all'arco s della curva compreso fra un punto fisso, ed il medesimo punto (x, y); in ambedue i casi sarà facile la determinazione delle

$$x', x'', x''', \ldots \; y', y'', y''', \ldots$$

considerate come funzioni della distanza r, o dell'arco s.

163.° L'ordine del contatto fra due date curve in un determinato punto, può anche desumersi dal numero delle costanti arbitrarie che si contenessero in una delle equazioni delle due curve. Supponiamo infatti che

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y, a, b, c \ldots) = 0$$

rappresentino l' equazioni delle due curve, e che n sia il numero delle costanti arbitrarie $a, b, c \ldots$ contenute nella seconda equazione. Non cessando la x di essere variabile indipendente, si potrà sempre disporre in modo delle costanti $a, b, c, \ldots$ che differenti delle funzioni

$$y, y', y'', y''', \ldots$$

ritengano i medesimi valori nel passaggio da una curva all'altra. Ora è evidente che ciascuna delle n costanti arbitrarie si determinerà dall'equazione finita

$$F(x, y, a, b, c \ldots) = 0$$

e da altre $n-1$ equazioni differenziali, quindi ciascuna delle medesime costanti, sarà funzione delle quantità

$$x, y, y', y'', \ldots \; y^{(n-1)}$$

e perciò fra le due curve date vi sarà nel punto (x, y) un contatto per lo meno dell'ordine $n-1$, e sarà nello stesso tempo il più elevato; che se più costanti arbitrarie rimangano indeterminate per mancanza delle equazioni differenziali, allora la curva in proposito cangierà di forma, e di posizione, ma non per questo cesserà di toccare la prima curva nel punto (x, y), e l'ordine del contatto sarà generalmente inferiore ad $n-1$.

164.° Per mostrare una qualche applicazione prendiamo un circolo di equazione

$$(x-X)^2 + (y-Y)^2 = \rho^2$$

nella quale vi sono le tre indeterminate X, Y, ρ, e perciò in generale l'ordine più elevato del contatto di un circolo con una curva sarà del secondo ordine; la determinazione delle due coordinate X, Y del centro si avrà immediatamente da una doppia derivazione eseguita sopra l'equazione considerando le X, Y, ρ come costanti, e si troverà

$$(x-X) + (y-Y)y' = 0$$

$$1 + y'^2 + (y-Y)y'' = 0$$

dalle quali otterremo le differenze $x-X$, $y-Y$ che sostituite nel secondo membro del valore di ρ, porge-

ranno la nota espressione del raggio di curvatura di una curva qualunque.

Prendiamo ancora una linea del secondo ordine rappresentata dall'equazione

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2A'x + 2B'y = K$$

e supponiamo che si riduca ad una parabola; in questo caso $C^2 = AB$ e potremo fare per semplicità $B = 1$ cosicchè l'equazione si trasformerà in

$$y^2 + Ax^2 + 2xy\sqrt{A} + 2A'x + 2B'y = K$$

ove si troveranno le quattro indeterminate A, A', B', K, e perciò il contatto potrà essere del terzo ordine. Eseguendo tre derivazioni successive, troviamo

$$yy' + Ax + (y + xy')\sqrt{A} + A' + B'y' = 0$$

$$yy'' + y'^2 + A + (2y' + y''x)\sqrt{A} + B'y'' = 0$$

$$yy''' + 3y'y'' + (3y'' + xy''')\sqrt{A} + B'y''' = 0$$

Se dalle due ultime eliminiamo la indeterminata B', avremo per la determinazione della A, l'equazione del secondo grado

$$A + \frac{(2y'y''' - 3y''^2)}{y'''}\sqrt{A} + \frac{y'^2y''' - 3y'y''^2}{y'''} = 0$$

la quale risoluta, e scelto il segno + come soddisfacente alla questione si trova

$$\sqrt{A} = \frac{3y''^2 - y'y'''}{y'''}$$

d'onde

$$A = \frac{(3y''^2 - y'y''')^2}{y'''^2}.$$

Con egual facilità giungeremo dall'eliminazione ai valori di B', A', cioè

$$B' = \frac{xy'y'''^2 - 3xy''^2y''' - 9y''^3 - yy'''^2}{y'''^2}$$

$$A' = \frac{y'y'''^2(y - xy') + 3y''^2(3y'y'' - yy''' + 2xy'y''' - 3xy''^2)}{y'''^2}$$

Infine i valori di A, A', B' danno la quarta indeterminata K. Non sarebbe ora difficile per mezzo delle note proprietà della parabola, e delle trasformazioni delle coordinate dedurre il valore del parametro, e delle coordinate X, Y riferite agli assi principali: in questo modo si avrebbe una completa determinazione di tutti gli elementi della parabola, onde sia con una data curva ad un contatto di terzo ordine; non potendoci trattenere in queste differenti discussioni ci basterà notare che la curva in questione ha con la parabola nel punto (x, y) il medesimo circolo osculatore: questa proprietà ci porta a concludere che la parabola sarà osculatrice della curva. Per un maggior dettaglio si potrà consultare una Memoria di Ampere inserita nel 14.° Cah. del giornale della scuola politecnica.

165.° Consideriamo in fine una curva parabolica rappresentata dalla funzione intera

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots + px^{n-2} + qx^{n-1}$$

Le n costanti arbitrarie a, b, c . . . . p, q si determineranno per mezzo dei valori delle funzioni

$$y\,,\ y'\,,\ y''\,,\ \ldots\ y^{(n-1)}$$

quindi la curva parabolica potrà avere con la curva data un contatto dell'ordine $n - 1$, o di un ordine superiore:

per conoscere poi l'equazione di questa curva parabolica, osserviamo che chiamando X, Y le coordinate di un suo qualunque punto, sarà egualmente

$$Y = a + bX + cX^2 \ldots\ldots + pX^{n-2} + qX^{n-1}$$

quindi per la differenza $Y - y$ potremo avere un risultato della forma

$$Y - y = B(X - x) + C(X - x)^2 + \ldots + Q(X - x)^{n-1}$$

Le nuove $n - 1$ costanti B, C .... P, Q si avranno dall'espressioni

$$\frac{dY}{dX}, \quad \frac{d^2Y}{dX^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1}Y}{dX^{n-1}}$$

corrispondenti ad $X = x$, in questo modo otterremo con facilità

$$B = y', \quad C = \frac{y''}{1 \cdot 2} \ldots . Q = \frac{y^{(n-1)}}{1.\,2.\,3..\,n-1}$$

dunque l'equazione della curva parabolica, che ha con la curva data un contatto dell'ordine $n - 1$, o di un ordine superiore, sarà

$$Y = y + y'(X - x) + \frac{y''}{1.2}(X - x)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{y^{(n-1)}}{1.\,2.\,3 \ldots n-1}(X - x)^{n-1}$$

La supposizione di $n = 2$, darà l'equazione della retta tangente condotta per il punto (x, y) alla curva data, cioè

$$Y = y + y'(X - x)$$

e l'ipotesi di $n=3$ porge l'equazione

$$Y = y + y'(X - x) + \frac{y''}{1 \cdot 2}(X - x)^2$$

la quale appartiene ad una parabola di secondo grado, e sarà osculatrice della curva, ed il suo asse trovasi in una retta parallela a quello delle y. Nello stesso modo per $n=4$, avremo la parabola cubica

$$Y = y + y'(X - x) + \frac{y''}{1 \cdot 2}(X - x)^2 + \frac{y'''}{1.2.3}(X - x)^3$$

Trasformazione delle coordinate rettilinee in coordinate polari, ed uso delle medesime per scuoprire diverse proprietà delle curve piane.

166.° Oltre le due coordinate rettilinee per mezzo delle quali si determina la rispettiva situazione dei punti collocati in un piano, vi sono anche le *coordinate polari*, le quali, come già abbiamo notato nel parag. 110 risultano da una distanza variabile del punto mobile da un punto fisso, e da un angolo parimenti variabile, che questa medesima distanza viene a formare con una retta fissa di posizione, e che passa per il punto fisso; la distanza variabile in proposito dicesi *raggio vettore*, come *polo* si dirà il punto fisso. Scelta la posizione del *polo*, e della retta fissa, per ogni punto di una data curva corrisponderà un certo raggio vettore, ed un angolo che il medesimo conterrà con la retta fissa, o ciò che torna lo stesso, per ogni punto di una data curva si otterrà un sistema di coordinate polari, e viceversa per ogni sistema

di coordinate polari vien determinata la situazione di un punto. È facile di trasformare le coordinate rettilinee in coordinate polari. Sieno α, β le coordinate rettilinee del *polo* o di un punto fisso, r il *raggio vettore* condotto dal punto (α, β) al punto mobile (r, y) e rappresenti u l'angolo che il raggio vettore forma con una retta parimenti fissa, e che noi supporremo essere l' asse delle ascisse, infine sia A l'angolo delle coordinate rettilinee, nel triangolo di lati, $x-\alpha$, $y-\beta$, r ricaveremo una relazione fra le coordinate rettilinee x, y, e le polari r, u, vale a dire

$$\frac{x-\alpha}{\text{sen}(A-u)}=\frac{y-\beta}{\text{sen}\,u}=\frac{r}{\text{sen}\,A}$$

d'onde

$$x=\frac{\text{sen}\,(A-u)}{\text{sen}\,A}r+\alpha\,,\quad y=\frac{\text{sen}\,u}{\text{sen}\,A}r+\beta$$

Se l'origine delle coordinate si scelga per *polo* dalla curva, avremo $\alpha=0$, $\beta=0$ ed i precedenti valori di x, y si ridurranno ad

$$x=\frac{\text{sen}\,(A-u)}{\text{sen}\,A}r\,,\qquad y=\frac{\text{sen}\,u}{\text{sen}\,A}r$$

Quando gli assi fossero ortogonali, si ha per il polo differente dall'origine

$$x=r\cos u+\alpha\,,\qquad y=r\,\text{sen}\,u+\beta$$

come per il caso opposto

$$x=r\cos u\,,\qquad y=r\,\text{sen}\,u\cdot$$

Quando una curva piana è rappresentata per un' equazione fra le coordinate rettiline x, y, si potranno per mezzo delle stabilite formole sostituire immediatamente

alle variabili x, y i loro valori espressi in coordinate polari; in questo modo si otterrà ciò che dicesi *Equazione polare* della curva. Veniamo ora a presentare alcune applicazioni dell'esposta teoria.

167.° Una retta riferita a coordinate oblique di angolo A, ha per equazione

$$y = \frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,(A - \varphi)}x + b$$

φ è l'angolo che la retta contiene con l'asse delle ascisse. Scegliendo l'origine per polo, si avrà per la sostituzione dei convenienti valori di x, y, l'equazione polare della retta,

$$r = \frac{b\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\,(A - \varphi)}{\text{sen}\,u\,\text{sen}\,(A - \varphi) - \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,(A - u)}$$

ovvero

$$r = \frac{b\,\text{sen}\,(A - \varphi)}{\text{sen}\,(u - \varphi)}$$

Questo valore del raggio vettore r si sarebbe anche potuta ottenere dall'osservare che nel triangolo ove sono i due lati, r, b si oppongono gli angoli $A - \varphi$, $u - \varphi$. Quando l'equazione della retta fosse data sotto la forma

$$\frac{X - x}{\text{sen}\,(A - \varphi)} = \frac{Y - y}{\text{sen}\,\varphi}$$

allora ritenendo l'origine per il polo, e chiamando R, U le coordinate polari del punto (X, Y), si avranno i due sistemi di valori

$$x = \frac{r\,\text{sen}\,(A - u)}{\text{sen}\,A}, \quad y = \frac{r\,\text{sen}\,u}{\text{sen}\,A}$$

$$X = \frac{R\,\text{sen}\,(A - U)}{\text{sen}A}, \quad Y = \frac{R\,\text{sen}\,U}{\text{sen}\,A}$$

quali, sostituiti daranno

$$\frac{\text{R sen}(\text{A} - \text{U}) - r \text{ sen}(\text{A} - u)}{\text{sen}(\text{A} - \varphi)} = \frac{\text{R sen U} - r \text{ sen } u}{\text{sen } \varphi}$$

quindi dalla riduzione otterremo l'equazione

$$\text{R sen}(\text{U} - \varphi) = r \text{ sen}(u - \varphi)$$

la quale appartiene ad una retta che passa per un punto dato (r, u). Osserveremo inoltre, che non trovandosi in questa equazione l'angolo A, sarà essa indipendente dal sistema delle coordinate rettilinee, che si è adottato, come d'altronde è chiaro.

Un circolo di raggio ρ, e di coordinate X, Y per il centro, avrà per equazione nel sistema degli assi ortogonali

$$(x - \text{X})^2 + (y - \text{Y})^2 = \rho^2$$

Scegliendo l'origine per polo, e sostituendoci

$$x = r \cos u, \qquad y = r \text{ sen U}$$

$$\text{X} = \text{R} \cos \text{U}, \qquad \text{Y} = \text{R sen U}$$

sarà

$$(r \cos u - \text{R} \cos \text{U})^2 + (r \text{ sen } u - \text{R sen U})^2 = \rho^2$$

la quale dopo le riduzioni diviene

$$r^2 - 2\text{R}r \cos(u - \text{U}) + \text{R}^2 = \rho^2$$

Alla medesima equazione si giunge quando obliqui fossero gli assi rettilinei; aggiungiamo ancora che nel triangolo di lati ρ, r, R, si oppone l'angolo $u - \text{U}$ al lato ρ, e perciò da un noto teorema di trigonometria si otterrebbe il precedente valore di ρ^2. Imaginando risoluta l'equazione polare del circolo rapporto ad r, avremo l'espressioni dei due raggi vettori, che dal polo vanno

ad incontrare due punti della circonferenza. Sieno r_1, r_2 le due radici r, sarà per le note proprietà dell'equazioni di secondo grado

$$r_1 r_2 = \rho^2 - R^2$$

Il valore di questo prodotto essendo indipendente dall' angolo variabile u, ne segue che scelto nella medesima circonferenza un altro punto (r', u') risulterà per le nuove radici r'_1, r'_2 la condizione

$$r_1 r_2 = r'_1 r'_2$$

cioè nel circolo le intere secanti, che partano da uno stesso punto sono reciprocamente proporzionali alle loro parti esteriori, come ci conosce dalla geometria elementare. Risolvendo poi rapporto ad r l'equazione polare del circolo otterremo

$$r = R \cos(u - U) \pm \sqrt{\rho^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 (u - U)}$$

Questa espressione si può ancora determinare geometricamente, col concepire abbassata dal centro del circolo una perpendicolare sopra l'intera secante r; allora la medesima r si decompone in due parti una delle quali è $R \cos(u - U)$, e l'altra è media proporzionale fra i due segmenti

$$\rho - R \operatorname{sen}(u - U), \qquad \rho + R \operatorname{sen}(u - U)$$

quindi per l'intera secante avrà luogo il segno $+$, e per la parte esteriore il segno $-$.

168.° Nella ricerca dell'equazioni polari della parabola dell'ellissi, e dell'iperbola supporremo le coordinate rettilinee ortogonali, e sceglieremo uno dei fuochi per polo della curva. In una parabola di equazione

$$y^2 = px$$

potremo prendere

$$x = \frac{p}{4} - r\cos u\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,u$$

ove l'angolo u si annulla per $x = o$, $y = o$. Sostituendo questi valori nell'equazione della curva, si avrà

$$r^2 + \frac{p\cos u}{\mathrm{sen}^2 u}\,r = \frac{p^2}{4\,\mathrm{sen}^2 u}$$

la quale risoluta porgerà le radici

$$r = \frac{p}{2(1 + \cos u)}\,, \qquad r = -\,\frac{p}{2(1 - \cos u)}$$

la seconda espressione appartiene al prolungamento del primo raggio vettore fino all'incontro della curva. Il valore positivo del raggio r si ottiene ancora dalla sostituzione della x, nella formola cognita

$$r = x + \frac{1}{4}p$$

la quale esprime la proprietà caratteristica della parabola di aver un suo punto qualunque egualmente distante dal fuoco, e da una data retta, che dicesi *direttrice*.

In una ellissi di semiassi maggiore, e minore a, b, faremo

$$a^2 - b^2 = c^2\,, \qquad c = ae\,, \qquad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$p = \frac{2b^2}{a} = 2a\,(1 - e^2)$$

e la sua equazione con l'origine al centro diverrà

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

Supponendo che il polo della curva coincida con uno dei fuochi, e che u sia l'angolo che il raggio vettore forma con l'asse della x, in modo che ad $u = o$ corrisponda il minimo raggio

$$a - c = a - ae$$

allora potremo prendere

$$x = ae + r\cos u\,, \qquad y = r \operatorname{sen} u$$

quindi sostituendo questi valori nell'equazione della curva, otterremo dopo facili riduzioni la nuova equazione di secondo grado

$$r^2 + \frac{2ae(1-e^2)\cos u}{1-e^2\cos^2 u}\, r = \frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2\cos^2 u}$$

la quale risoluta porgerà le due radici

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos u}\,, \qquad r = -\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos u}$$

ovvero

$$r = \frac{p}{2(1+e\cos u)}\,, \qquad r = -\frac{p}{2(1-e\cos u)}$$

Quì pure il secondo valore di r rappresenta il prolungamento del primo raggio vettore fino all'incontro della curva; più semplicemente si giunge all'espressione positiva di r coll'osservare che nell'ellissi, il raggio vettore più vicino a uno dei fuochi è dato in funzione dell'ascissa per la formola

$$r = a - ex$$

quindi sostituendoci il valore della x in coordinate polari, si ricaverà per la risoluzione di una equazione di

primo grado il valore richiesto di r. Aggiungiamo che immaginando condotto dal secondo fuoco l'altro raggio vettore $2a - r$; nel triangolo di lati, r, $2a - r$, $2c = 2ae$, si avrà

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4a^2 e^2 + 4aer \cos u$$

d'onde riducendo, e dividendo per $4a$ verrà immediatamente

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos u}$$

In una iperbola, supponendo

$$a^2 + b^2 = c^2, \qquad c = ae, \qquad b = a\sqrt{e^2 - 1}$$

$$p = \frac{2b^2}{a} = 2a(e^2 - 1)$$

avremo per l'equazione con l'origine al centro

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

Qui pure scegliendo per polo, il fuoco più vicino al punto (x, y) potremo prendere

$$x = ae - r \cos u, \qquad y = r \operatorname{sen} u$$

l'angolo u, che il raggio vettore contiene con l'asse delle ascisse ha origine ad $y = o$, ove insieme

$$x = a, \qquad \text{ed} \qquad r = ae - a$$

Sostituendo pertanto gli indicati valori di x, y nell'equazione della curva, giungeremo come per l'ellissi ad una nuova equazione del secondo grado rapporto ad r; vale a dire

$$r^2 - \frac{2ae(e^2 - 1)\cos u}{e^2 \cos^2 u - 1} r = - \frac{a^2(e^2 - 1)^2}{e^2 \cos^2 u - 1}$$

la quale risoluta darà

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos u}, \qquad r = - \frac{a(e^2 - 1)}{1 - e \cos u}$$

od anche introducendovi il parametro, sarà

$$r = \frac{p}{2(1 + e \cos u)}, \qquad r = - \frac{p}{2(1 - e \cos u)}$$

La seconda espressione di r rappresenta il prolungamento del primo raggio vettore fino all'incontro della curva: facendo uso della formola

$$r = ex - a$$

e sostituendoci l'indicato valore della x in coordinate polari, si ricaverà facilmente il raggio r di già trovato in funzione dell'angolo u. Riassumendo le tre espressioni positive del raggio vettore per le tre curve di secondo ordine, diremo che l'equazione polare

$$r = \frac{p}{2(1 + e \cos u)}$$

appartiene alla parabola, all'ellissi, ed all'iperbola, secondo si ha $e = 1$, $e < 1$ ed $e > 1$. Come già si è fatto per l'ellissi del secondo fuoco si conduca il raggio vettore $2a + r$, nel triangolo di lati r, $2a + r$, $2c = 2ae$, e coll'angolo u opposto a, $2a + r$ si avrà

$$(2a + r)^2 = r^2 + 4a^2 e^2 - 4aer \cos u$$

ove riducendo e dividendo per 4 risulterà

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos u}$$

169.° Nel passare alla ricerca dell'equazioni polari di alcune curve di ordine superiore al secondo sceglieremo primieramente la curva del *Cassini*, rappresentata dall'equazione

$$y^4 + 2(a^2 + x^2)\, y^2 + (a^2 - x^2)^2 = b^4$$

In questa curva nella quale il prodotto delle distanze di un suo punto qualunque dagli estremi della retta $2a$ è costantemente eguale al quadrato b^2, si potrà prendere per polo l'origine delle coordinate, che trovasi alla metà della retta $2a$; cosicchè avremo

$$x = r \cos u\,, \qquad y = r \operatorname{sen} u$$

quali valori sostituiti nell'equazione della curva porgeranno dopo facili riduzioni

$$r^4 - 2a^2\, r^2 \cos 2u = b^4 - a^4$$

Tal'è l'equazione polare della curva del *Cassini*: se si risolva rapporto ad r^2 otterremo

$$r^2 = a^2 \cos 2u \pm \sqrt{b^4 - a^4 \operatorname{sen}^2 2u}$$

L'enunciata proprietà della quale è dotata la curva del Cassini, permette di poter anche stabilire direttamente la sua equazione polare; infatti se sieno R, R' le rette che dagli estremi di $2a$ si conducono ad un punto qualunque della curva, si avrà

$$RR' = b^2\,, \qquad \text{od} \qquad R^2\, R'^2 = b^4$$

Ora dalle stabilite denominazioni i valori di R^2, R'^2 saranno per un noto teorema di trigonometria

$$R^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos u\,, \qquad R'^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos u$$

quindi dal loro prodotto

$$(r^2 + a^2)^2 - 4a^2\, r^2 \cos^2 u = b^4$$

la quale si ridurrà a quella di già trovata. Nel caso particolare di $a = b = \frac{k}{\sqrt{2}}$, la curva del Cassini diviene la *lemniscata* di *Bernoulli*, della quale la sua equazione in coordinate ortogonali sarà

$$(x^2 + y^2)^2 = k^2(x^2 - y^2)$$

ed in coordinate polari

$$r^2 = k^2 \cos 2u$$

Queste curve trovano delle utili applicazioni nel calcolo integrale dei trascendenti ellittici.

Consideriamo la *Cissoide* di *Diocle* rappresentata dall'equazione

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

Se da un punto estremo B di una data retta AB $= 2a$ s'innalzi una perpendicolare indefinita, e dal punto A sotto un angolo variabile con la retta $2a$ si congiunga un punto qualunque K di questa perpendicolare, e si prenda sulla retta AK un segmento KM eguale alla corrispondente corda AC del circolo descritto sopra $2a$ preso come diametro, il punto M apparterrà, come si sà alla *Cissoide*: l'origine delle coordinate trovasi in A, e la direzione dell'asse dell'ascissa trovasi sul diametro $2a$; se le coordinate polari sieno AM$=r$, e l'angolo MAB$=u$ sarà

$$x = r \cos u, \qquad y = r \operatorname{sen} u$$

quali valori sostituiti, daranno per l'equazione polare della Cissoide

$$r = \frac{2a \operatorname{sen}^2 u}{\cos u} = 2a \operatorname{sen} u \operatorname{tang} u$$

Si avrà un'altra specie di Cissoide se la perpendicolare s'innalzi dal centro del circolo, e non già dall'estremità, in questo caso ritenendo il tutto come sopra, la sua equazione a coordinate ortogonali sarà

$$y^2 = \frac{x^2(a + x)}{a - x}$$

e l'equazione a coordinate polari

$$r = -\frac{a \cos 2u}{\cos u}$$

ove per $u = 0$, si verifica $r = -a$.

Prendiamo in ultimo la *Concoide* di *Nicomede* rappresentata dall'equazione

$$y = \frac{b + x}{x} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Se da un punto dato preso fuori di una retta si conducano delle rette tali che prese le porzioni al di sopra e al di sotto tutte eguali fra di loro, e ad una data retta a, la curva superiore ed inferiore, che passa per tutti gli estremi punti coincide con la *Concoide*; il punto di partenza delle rette dicesi *polo*, come dicesi *direttrice* la retta che separa i rami della curva superiore ed inferiore; la perpendicolare abbassata dal *polo* sopra la direttrice è eguale a, $b > a$ l'asse della y si prende nella direzione della direttrice, e quello delle x in una retta perpendicolare a questa. Ciò posto chiamando r il raggio vettore che dal polo conducesi ad un punto qualunque della curva, ed u l'angolo che la r contiene con l'asse della x, si avrà

$$x = a \cos u \quad , \qquad y = r \operatorname{sen} u$$

d'onde per la sostituzione otterremo con facilità

$$r = a + \frac{b}{\cos u} = a + b \sec u$$

Tal'è l'equazione polare alla Concoide di Nicomede, e che si può dedurre da una costruzione geometrica semplicissima.

170.° Le cordinate polari possono adoprarsi anche assai utilmente nella ricerca di diverse proprietà delle curve piane, come alla determinazione dei centri, degli assi, degli assintoti . . . ; per fissar le idee supponiamo di dover determinare gli assi principali delle linee di secondo ordine dotate di centro, e racchiuse nell'equazione generale

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = K$$

Se gli assi delle x, e delle y sono obliqui facendo fra di loro l'angolo ε, ed il polo coincida con l'origine delle coordinate, sarà

$$x = \frac{r \operatorname{sen} (\varepsilon - u)}{\operatorname{sen} \varepsilon} \qquad y = \frac{r \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} \varepsilon}$$

Sostituiti questi valori nell'equazione di secondo ordine, si ricaverà

$$r^2 = \frac{K \operatorname{sen}^2 \varepsilon}{A \operatorname{sen}^2 (\varepsilon - u) + B \operatorname{sen}^2 u + 2C \operatorname{sen} u \operatorname{sen} (\varepsilon - u)}$$

Sviluppando il denominatore di questa frazione, e ponendo per semplicità

$$A_1 = A + A - 2C \cos \varepsilon, \quad B_1 = 2 \operatorname{sen} \varepsilon (C - A \cos \varepsilon)$$

$$C_1 = A \cos 2\varepsilon + B - 2C \cos \varepsilon = A_1 - 2 A \operatorname{sen}^2 \varepsilon$$

troveremo

$$r^2 = \frac{2K \operatorname{sen}^2 \varepsilon}{A_1 + B_1 \operatorname{sen} 2u - C_1 \cos 2u}$$

La ricerca degli assi principali si riduce al massimo, e minimo valore di r^2 considerato come funzione dell'angolo u. Per arrivare con più facilità alle condizioni del massimo, o minimo si avverta che il solo denominatore è variabile, e perciò basterà annullare la derivata del denominatore, o ciò che torna lo stesso

$$B_1 \cos 2u + C_1 \operatorname{sen} 2u = 0$$

dalla quale

$$\frac{\cos 2u}{C_1} = \frac{\operatorname{sen} 2u}{-B_1} = \pm \frac{1}{\sqrt{B_1^2 + C_1^2}}$$

od anche

$$\frac{C_1 \cos 2u - B_1 \operatorname{sen} 2u}{B_1^2 + C_1^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{B_1^2 + C_1^2}}$$

d'onde otterremo i due valori

$$B_1 \operatorname{sen} 2u - C_1 \cos 2u = \pm \sqrt{B_1^2 + C_1^2} \quad .$$

Di qui chiamando a^2, b^2 il massimo, e minimo valore di r^2, avremo

$$a^2 = \frac{2K \operatorname{sen}^2 \varepsilon}{A_1 - \sqrt{B_1^2 + C_1^2}}, \quad b^2 = \frac{2K \operatorname{sen}^2 \varepsilon}{A_1 + \sqrt{B_1^2 + C_1^2}}$$

Per dedurre un equazione di secondo grado, la quale contenga per radici i quadrati a^2, b^2, si sommino, e si moltiplichino insieme, otterremo evidentemente

$$a^2 + b^2 = \frac{4A_1 K \operatorname{sen}^2 \varepsilon}{A_1^2 - (B_1^2 + C_1^2)}$$

$$a^2 \, b^2 = \frac{4K^2 \operatorname{sen}^4 \varepsilon}{A_1^2 - (B_1^2 + C_1^2)}$$

Ora dai valori di A_1, B_1, C_1 si ha

$$A_1^2 - (B_1^2 + C_1^2) = 4 \operatorname{sen}^2 \varepsilon \, (AB - C^2)$$

e per conseguenza

$$a^2 + b^2 = (A + B - 2C \cos \varepsilon) \frac{K}{AB - C^2}$$

$$a^2 b^2 = \frac{K^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon}{AB - C^2}$$

Chiamando pertanto r^2 l' incognita comune, dedurremo l'equazione di secondo grado rapporto ad r^2

$$r^4 - (A + B - 2C \cos \varepsilon) \frac{K}{AB - C^2} r^2 + \frac{K^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon}{AB - C^2} = 0$$

La risoluzione di questo problema è d'accordo con quanto abbiamo detto sullo stesso soggetto al parag. 95 nelle applicazioni dei massimi, e minimi a più variabili indipendenti. Nell'iperbola b^2 sarà negativa mentre in questa curva si verifica $AB - C^2 < 0$. L'ultima trovata equazione del quarto grado rapporto ad r ci fa scuoprire con estrema facilità alcune interessanti proprietà dell'ellissi, e dell'iperbola. Supponiamo infatti che gli assi obliqui delle coordinate sieno diametrali, allora $C = 0$, quindi chiamando a', b' i semidiametri nella direzione delle medesime coordinate, sarà l'equazione dell'ellissi

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

d'onde

$$A = \frac{1}{a'^2}, \quad B = \frac{1}{b'^2}, \quad C = 0, \; K = 1$$

e per conseguenza

$$r^4 - (a'^2 + b'^2) r^2 + a'^2 b'^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon = 0$$

Le radici di questa equazione sono i quadrati a^2, b^2 dei semiassi principali, e perciò dalle proprietà delle radici dell'equazioni di secondo grado

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 , \qquad ab = a'b' \text{ sen } \varepsilon$$

Vale a dire, la somma costante dei quadrati degli assi principali eguaglia la somma dei quadrati di due assi qualunque obliqui conjugati; il rettangolo costruito sopra gli assi principali è eguale al parallelogrammo costruito sopra due diametri conjugati. Nell'iperbola si avrebbe

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 , \qquad ab = a'b' \text{sen } \varepsilon$$

per le quali sussiste l'enunciato di somiglianti proprietà. Supponiamo ora che gli assi delle x, y sieno ortogonali e non già principali, l'equazione del quarto grado diverrà

$$r^4 - (A + B) \frac{Kr^2}{AB - C^2} + \frac{K^2}{AB - C^2}$$

Sieno r_0, r_1 i semidiametri della curva paralleli agli assi delle x, e delle y, si ricaverà dall'equazione della curva,

$$Ar_0{}^2 = K , \qquad Br_1{}^2 = K$$

d'onde

$$A = \frac{K}{r_0{}^2} , \quad B = \frac{K}{r_1{}^2}$$

e perciò

$$r^4 - \left(\frac{1}{r_0{}^2} + \frac{1}{r_1{}^2} \right) \frac{K^2 r^2}{AB - C^2} + \frac{K^2}{AB - C^2} = 0$$

Qui pure le radici a^2, b^2 dell'equazione reppresenteranno

i quadrati de'semiassi principali dell'ellissi, quindi

$$a^2 + b^2 = \frac{K^2}{AB - C^2}\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2}\right)$$

$$a^2 b^2 = \frac{K^2}{AB - C^2}$$

Dividendo la prima per la seconda risulterà

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2}$$

È assai facile di formare l'enunciato della proprietà dell'ellisi, racchiusa in questa formola.

171.° Le coordinate polari si adoprano assai utilmente per riconoscere le proprietà di quelle curve che diconsi *spirali*; spesso accade che queste curve formano un'infinità di giri attorno l'origine, allontanandosi, od avvicinandosi continuamente. Fra le *spirali* noi sceglieremo in particolare la *spirale di Archimede*, la *spirale parabolica*, la *spirale iperbolica*, e la *spirale logaritmica.*

Nella *spirale di Archimede*, il raggio vettore è proporzionale all'angolo u, e perciò la sua equazione sarà della forma

$$r = au$$

finchè la costante a è positiva, converrà che l'angolo u sia parimenti positivo, mentre il raggio vettore non può assumere valori negativi. Facendo crescere l'angolo u fino alla circonferenza 2π, e chiamando R il corrispondente raggio vettore, si avrà per la determinazione della costante a la equazione

$$R = 2a\pi$$

quindi dall'eliminazione della medesima a verrà

$$r = R\frac{u}{2\pi}$$

o semplicemente

$$r = \frac{u}{2\pi}$$

quante volte si assuma $R = 1$; e perciò la curva vien generata dal moto di un punto che percorre una retta data R fissa in un estremità, nel medesimo tempo, che l'altra estremità percorre un intera circonferenza. Se l'angolo cresca indefinitamente per valori positivi, crescerà egualmente il raggio vettore r, e perciò la *spirale* di *Archimede* si allontanerà senza fine dall'origine formando attorno la medesima con un movimento diretto un'infinità di giri.

Nella *spirale parabolica* il raggio vettore è medio proporzionale geometrico fra una data retta a, ed il corrispondente angolo variabile u ; e perciò la sua equazione sarà

$$r^2 = au$$

Quando $u = o$, si ha ancora $r = o$, e perciò la spirale ha la sua origine nel polo ; e farà attorno a questo un numero indefinito di giri, mentre al crescere dell'angolo u, crescerà altresì il raggio vettore r.

Se nell'equazione dell'iperbola equilatera fra gli assintoti, in luogo delle coordinate rettilinee x, y si sostituiscano le due coordinate polari, r, u ; la nuova curva rappresentata dall'equazione

$$ru = a$$

dicesi *Spirale Iperbolica.* Fatto centro nel polo, e descritta sopra l'asse delle ascisse una serie di archi circolari tutti eguali in lunghezza ad una data retta a, la

curva che passa per tutti gli estremi di questi archi eguali sarà precisamente la *spirale iperbolica*; infatti conducendo dal polo un raggio vettore r ad un punto qualunque della spirale, che contenga l'angolo u con l'asse delle ascisse si otterrà

$$1 : r :: u : a \,, \qquad \text{ossia} \qquad ru = a$$

In questa curva

$$r = \infty \qquad \text{per} \qquad u = o$$

ed

$$r = o \qquad \text{per} \qquad u = \infty$$

e perciò la curva formerà un'infinità di giri avvicinandosi continuamente al polo senza mai raggiungerlo.

Nella *Spirale logaritmica* l'angolo u è proporzionale al logaritmo Neperiano del raggio vettore, vale a dire

$$u = a \log (r)$$

ossia

$$r = e^{\frac{u}{a}}$$

Nell'equazione di questa curva ad $u = o$ corrisponde $r = 1$, e ad $u = -\infty$ si ha $r = o$, ed infine per $u = \infty$ otterremo $r = \infty$. Se dunque a partir dal polo lungo il raggio vettore ad una distanza 1 da questo polo, la curva formerà un'infinito di giri attorno il polo, allontanandosi indefinitamente, ed accostandosi continuamente al medesimo senza mai raggiungerlo.

Uso delle coordinate polari per determinare le inclinazioni delle curve, il differenziale dell'arco, la retta tangente... il raggio di curvatura ... di una curva piana.

172.° Ritenendo che l'origine delle coordinate coincida con il polo della curva, sceglieremo le consuete formole

$$x = \frac{r \operatorname{sen}(A - u)}{\operatorname{sen} A}, \quad y = \frac{r \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} A}$$

per mezzo delle quali da un sistema di coordinate rettilinee si passa ad un sistema di coordinate polari. Differenziando i valori di x, ed y, abbiamo

$$dx = \frac{\operatorname{sen}(A - u)\, dr - r \cos(A - u)\, du}{\operatorname{sen} A}$$

$$dy = \frac{\operatorname{sen} u\, dr + r \cos u\, du}{\operatorname{sen} A}$$

Ciò posto per cominciare dall'inclinazione φ, che presenta in ogni suo punto una curva piana con l'asse delle ascisse, fu veduto al parag. 113, che per la tangente trigonometrica di questo angolo φ si verifica

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dy \operatorname{sen} A}{dx + dy \cos A}$$

ove formando il numeratore, e denominatore per mezzo dei precedenti valori dx, dy otterremo

$$dx + dy \cos A = \cos u\, dr - r \operatorname{sen} u\, du$$

$$dy \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} u\, dr + r \cos u\, du$$

quindi

$$\tang \varphi = \frac{\operatorname{sen} u \, dr + r \cos u \, du}{\cos u \, dr - r \operatorname{sen} u \, du}$$

la quale espressione è indipendente dall'angolo A delle coordinate, come deve essere necessariamente. Dalla medesima si ricava

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{tang} u + r \dfrac{du}{dr}}{1 - \operatorname{tang} u \dfrac{rdu}{dr}}$$

e separando il termine $\frac{rdu}{dr}$, abbiamo

$$\frac{rdu}{dr} = \frac{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} u}{1 + \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} u} = \operatorname{tang} (\varphi - u)$$

ed in fine

$$\cot (\varphi - u) = \frac{dr}{rdu}$$

A tutto ciò aggiungeremo, che per il raggio vettore r, e per le coordinate x, y si ha

$$r^2 = (x + y \cos A)^2 + y^2 \operatorname{sen}^2 A\,, \quad \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} A \cos u - \cos A \operatorname{sen} u}$$

e perciò dalla seconda

$$\operatorname{tang} u = \frac{y \operatorname{sen} A}{x + y \cos A}\,, \quad u = \operatorname{arc\,tang} \frac{y \operatorname{sen} A}{x + y \cos A}$$

d'onde per la differenziazione di r^2, ed u deduciamo

$$rdr = (x + y \cos A)\, dx + (y + x \cos A)\, dy$$

$$du = \frac{(xdy - ydx) \operatorname{sen} A}{(x + y \cos A)^2 + y^2 \operatorname{sen}^2 A} = \frac{(xdy - ydx) \operatorname{sen} A}{r^2}$$

dalla quale ultima viene

$$(xdy - ydx) \text{ sen } A = r^2 du$$

È facile il vedere che questa espressione rappresenta il doppio del differenziale dell'area del settore curvilineo compreso fra l'asse delle ascisse, ed il raggio r.

Il valore di già ottonnto per la tangente trigonometrica dell' angolo $\varphi - u$ si può anche ricavare facendo uso dell'equazione polare di una retta, che passa per un punto dato. Si riprenda infatti la formola trovata al parag. 167, cioè

$$r \text{ sen } (u - \varphi) = R \text{ sen } (U - \varphi)$$

e supponiamo che u ed r, sieno comuni alla retta, ed alla curva: il secondo membro sarà una quantità costante, per cui nel passaggio dalla retta alla curva, le quantità r, u, $\frac{dr}{du}$ devono mantenere i medesimi valori e per conseguenza

$$\text{sen } (u - \varphi) dr + r \cos (u - \varphi) du = 0$$

dalla quale si ricava immediatamente il valore della tangente, o della cotangente trigonometrica dell'angolo $\varphi - u$.

173.° Nell'equazioni delle curve riferite a coordinate polari, il raggio vettore si considera generalmente come una funzione dell'angolo u, onde per la funzione, e per le derivate potremo prendere

$$r = f(u), \quad \frac{dr}{du} = f'(u) = r', \quad \frac{d^2r}{du^2} = f''(u) = r'', \ \ldots .$$

Per ottenere l'equazione polare di una rotta, che tocca una curva in un punto dato (r, u) conviene riprendere la formola generale

$$r \text{ sen } (\varphi - u) = R \text{ sen } (\varphi - U)$$

e separare la variabile φ; le coordinate polari, R, U appartengono ad un punto qualunque della retta. Per eseguire con più agevolezza questa separazione di variabili, osserviamo che

$$\varphi - U = \varphi - u - (U - u)$$

e quindi

$$\operatorname{sen}(\varphi - U) = \operatorname{sen}(\varphi - u)\cos(U - u) - \cos(\varphi - u)\operatorname{sen}(U - u)$$

qual valore sostituito, e separando $\varphi - u$ col dividere per sen $(\varphi - u)$ otterremo con facilità

$$\frac{R\cos(U - u) - r}{R\operatorname{sen}(U - u)} = \cot(\varphi - u) = \frac{r'}{r}$$

ovvero

$$\frac{R\cos(U - u) - r}{R\operatorname{sen}(U - u)} = \frac{dr}{rdu} = \frac{r'}{r} = \frac{d\log(r)}{du}$$

Tal'è l'equazione polare di una retta tangente una curva in un punto dato (r, u). Quest'ultima formola si potrebbe anche ottenere per una considerazione geometrica, che verrò ad indicare in poche parole. Dal punto (R, U) si abbassi una perpendicolare sul raggio vettore r, è evidente che $U - u$ sarà l'angolo dei due raggi vettore R, r ed insieme R sarà l'ipotenusa di un triangolo rettangolo del quale i cateti sono

$$R\cos(U - u), \quad R\operatorname{sen}(U - u)$$

Di più indicando per ω l'angolo formato dalla tangente, e dal raggio vettore r, avremo

$$u = \omega + \varphi, \quad \text{ed} \quad \omega = -(\varphi - u)$$

Ora ω è un angolo di un triangolo rettangolo, al qual angolo si oppone il cateto R sen $(U - u)$ ed è adiacente

cateto $r - R\cos(U-u)$, e perciò

$$\frac{r - R\cos(U-u)}{R\,\text{sen}\,(U-u)} = \cot\omega$$

ovvero

$$\frac{R\cos(U-u) - r}{R\,\text{sen}\,(U-u)} = \cot(\varphi - u)$$

la quale coincide con quanto fu stabilito da semplici considerazioni analitiche.

L'equazione polare di una retta normale ad una curva in un punto dato (r, u) si stabilisce con la medesima facilità. Sieno R, U le coordinate polari di un punto qualunque della retta normale, e sia φ_1 l'angolo che la medesima contiene con l'asse delle ascisse, avremo

$$\frac{R\cos(U-u) - r}{R\,\text{sen}\,(U-u)} = \cot(\varphi_1 - u)$$

ma

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

d'onde

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - u\right) = -\,\text{tang}\,(\varphi - u)$$

dunque

$$\frac{R\cos(U-u) - r}{R\,\text{sen}\,(U-u)} = -\frac{1}{\cot(\varphi - u)}$$

ossia

$$\frac{R\cos(U-u) - r}{R\,\text{sen}\,(U-u)} = -\frac{r\,du}{dr} = -\frac{r}{r'}$$

Tal'è l'equazione polare della retta normale ad una curva in un dato punto (r, u).

L'inclinazione φ_1 della normale all'asse dell'ascisse

si determina evidentemente dall'equazione

$$\cot(\varphi_1 - u) = -\frac{1}{\cot(\varphi - u)} = -\frac{r}{r'}$$

ossia

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - u) = -\frac{r'}{r}$$

Quando l'angolo φ è acuto, l'angolo φ_1 sarà ottuso, e perciò volendo conoscere il nuovo angolo φ' acuto che la medesima fa con l'asse dell'ascisse, converrà sostituire $\varphi_1 = 180 - \varphi'$, d'onde

$$\operatorname{tang}(\varphi' + u) = \frac{r'}{r}$$

l'angolo φ ed il nuovo angolo φ' sono di segno contrario.

174.° Per mostrare una qualche applicazione supponiamo che la curva data si riduca ad una linea del secondo ordine, della quale la sua equazione polare è generalmente

$$r = \frac{p}{2(1 + e\cos u)}$$

avremo dalla derivazione

$$r' = \frac{p\, e \operatorname{sen} u}{2(1 + e\cos u)^2}$$

d'onde

$$\frac{r'}{r} = \frac{e \operatorname{sen} u}{1 + e\cos u}$$

Di qui l'equazione polare della tangente diverrà

$$\frac{R\cos(U - u) - r}{R \operatorname{sen}(U - u)} = \frac{e\operatorname{sen} u}{1 + e\cos u}$$

Togliendo le frazioni, e sostituendoci il valore di r,

troveremo con facilità

$$R = \frac{p}{2\left(\cos(U - u) + e \cos U\right)}$$

Questa espressione che rappresenta la lunghezza del raggio vettore condotto dal fuoco della curva ad un punto qualunque della retta tangente si ridurrà evidentemente al valore del raggio vettore r della curva per la sola supposizione di $U = u$.

Nello stesso modo per l'equazione polare della retta normale una linea del secondo ordine in un dato punto (r, u), avremo

$$\frac{R \cos(U - u) - r}{R \operatorname{sen}(U - u)} = -\frac{(1 + e \cos u)}{e \operatorname{sen} u}$$

dalla quale si trova

$$R = \frac{e\, r \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}(U - u) + e \operatorname{sen} U}$$

Qui pure per la supposizione di $U = u$, si avrà $R = r$, come d'altronde è chiaro. Prendiamo inoltre una lemmiscata di equazione

$$r^2 = a^2 \cos 2u$$

avremo dalla derivazione

$$r' = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2u}{r}, \quad \frac{r'}{r} = -\operatorname{tang} 2u$$

quindi l'equazione polare della retta tangente la lemniscata in un punto (r, u) sarà

$$\frac{R \cos(U - u) - r}{R \operatorname{sen}(U - u)} = -\frac{\operatorname{sen} 2u}{\cos 2u}$$

nella quale togliendo le frazioni, e riducendo si ottiene

$$R \cos (U - 3u) = r \cos 2u$$

Infine elevando al quadrato, e sostituendosi il valore di r^2 dedurremo

$$R^2 = \frac{a^2 \cos^3 2u}{\cos^2(U - 3u)}$$

Con la stessa facilità per l'equazione polare della retta normale, troveremo

$$\frac{R \cos (U - u) - r}{R \operatorname{sen} (U - u)} = \frac{\cos 2u}{\operatorname{sen} 2u}$$

dalla quale

$$R \operatorname{sen} (3u - U) = r \operatorname{sen} 2u$$

Per eliminare il raggio vettore r senza introdurci le irrazionalità, basterà elevare al quadrato, e perciò

$$R^2 = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 2u \cos 2u}{\operatorname{sen}^2(3u - U)}$$

In ambedue l' equazioni polari della tangente , e della normale si ricaverà l' equazione polare della curva per la sola supposizione di $U = u$.

175.° Immaginiamo ora condotta dal polo della curva una retta indefinita, e perpendicolare all'estremità del raggio vettore, è evidente che questa retta incontrerà in due punti determinati la retta tangente , e la retta normale. Questa retta indefinita condotta perpendicolarmente all'estremità del raggio vettore r, si chiamerà *Asse polare* della curva. Ciò posto sia v l'angolo acuto compreso fra la tangente, e l'asse polare, avremo

$$v = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad \operatorname{tang} v = \cot \omega = - \cot (\varphi - u)$$

alla quale per maggior generalità possiamo sostituire

$$\tang v = \pm \cot (\varphi - u)$$

d'onde

$$\tang v = \pm \frac{dr}{r du} = \pm \frac{d \log (r)}{du}, \tang v = \pm \frac{r'}{r}$$

ed insieme

$$\sen v = \pm \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}, \quad \cos v = \pm \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

La direzione della tangente, della normale, e dell' asse polare ci permette di poter assegnare le quattro note rette sotto il titolo, di *tangente*, *suttangente*, *normale* e *sunnormale*, come già si è fatto per le curve riferite agli assi rettilinei. Nel sistema adunque delle coordinate polari chiameremo *tangente* della curva, la retta compresa fra il punto di contatto fino all'incontro dell'asse polare, *suttangente* la retta computata sull'asse polare, e compresa fra il polo, ed il punto d'incontro del medesimo asse con la tangente, *normale*, la perpendicolare abbassata dal punto di contatto fino all'incontro dell'asse polare, e *sunnormale* la retta compresa fra il polo, e l'estremità della normale ove incontra l'asse. Indicando queste quattro rette con le lettere consuete t, t_1, n, n_1 avremo dai triangoli rettangoli (t, t_1, r), (n, n_1, r) le proporzioni

$$t = \frac{t_1}{\cos v} = \frac{r}{\sen v}, \quad n = \frac{n_1}{\sen v} = \frac{r}{\cos v}$$

d'onde

$$t = \frac{r}{\sen v}, \quad t_1 = r \cot v, \quad n = \frac{r}{\cos v}, \quad n_1 = r \tang v$$

ossia

$$t = r \operatorname{cosec} v\,,\quad t_1 = r \cot v\,,\quad n = r \sec v\,,\quad n_1 = r \operatorname{tang} v$$

nelle quali sostituendosi i valori di sen v, cos v .... in funzione di r, r' .... verrà

$$t = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2}\,,\qquad t_1 = \frac{r^2}{r'}$$

$$n = \sqrt{r^2 + r'^2}\,,\qquad n_1 = r'$$

Volendo ancora ottenere in coordinate polari la perpendicolare h abbassata dal polo sulla direzione della tangente, converrà riprendere un'espressione di già trovata al parag. 128, e che sussiste nel sistema delle coordinate rettilinee, vale a dire

$$h = \frac{(x\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\operatorname{sen} A}{\mathrm{d}s}$$

ove

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y \cos A)^2 + \mathrm{d}y^2 \operatorname{sen}^2 A}$$

Sostituendo adunque i valori di $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ di già trovati al parag. 172, otterremo

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}u^2}\,,\qquad h = \frac{r^2\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}u^2}}$$

Ambedue queste formole per l'introduzione della funzione derivata r', divengono

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}u\sqrt{r^2 + r'^2}\,,\qquad h = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

A tutti questi differenti risultati si giunge col far prendere all'asse delle x un movimento di rotazione da divenir perpendicolare al raggio vettore: in questa ipotesi $u = \frac{\pi}{2}$, tale sarà il valore da sostituirsi nelle espressioni

di x, ed y, e nei differenziali dx, dy. Così riprendendo l'espressioni di già riportate al parag. 127

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dx\, dy \cos A}$$

$$t = \frac{yds}{dy}\ , \quad t_1 = \frac{ydx}{dy}\ , \quad n = \frac{yds \operatorname{sen} A}{dx + dy \cos A}$$

$$n_1 = \frac{y(dy + dx \cos A)}{dx + dy \cos A}$$

ed assumendo

$$x = \frac{r \operatorname{sen} (A - u)}{\operatorname{sen} A}\ , \quad y = \frac{r \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} A}$$

d'onde

$$dx = \frac{\operatorname{sen} (A - u)\, dr - r \cos (A - u)\, du}{\operatorname{sen} A}$$

$$dy = \frac{\operatorname{sen} u\, dr + r \cos u\, du}{\operatorname{sen} A}$$

e facendo $u = \frac{\pi}{2}$ avremo

$$x = -\frac{r \cos A}{\operatorname{sen} A}\ , \qquad y = \frac{r}{\operatorname{sen} A}$$

$$dx = -\frac{(\cos A\, dr + r \operatorname{sen} A\, du)}{\operatorname{sen} A}\ , \quad dy = \frac{dr}{\operatorname{sen} A}$$

Questi valori porgeranno per la sostituzione

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 du^2}\ , \qquad t = \frac{r}{dr} \sqrt{dr^2 + r^2 du^2}$$

$$t_1 = \frac{r^2 du}{dr}, \quad n = \frac{1}{du} \sqrt{dr^2 + r^2 du^2}, \quad n_1 = \frac{dr}{du}$$

le quali coincidono con quelle di già stabilite con altre considerazioni.

176.° Una facile applicazione dell'esposte teorie si trova nelle *spirali*; così nella spirale di Archimede

$$r = au\,, \qquad r' = a$$

$$\text{tang}\, v = \cot(\varphi - u) = \frac{1}{u}$$

d'onde le quattro rette più volte nominate diverranno

$$t = au\sqrt{1+u^2}\,, \qquad t_1 = \frac{a^2 u^2}{a} = ru$$

$$n = a\sqrt{1+u^2}\,, \qquad n_1 = a.$$

Questa curva come succede nella parabola Apolloniana, ha la proprietà di avere la sunnormale costante.

Nella spirale parabolica, si ha

$$r^2 = au\,, \qquad r' = \frac{a}{2r}$$

e perciò

$$t = r\sqrt{1+4u^2}\,, \qquad t_1 = 2ru$$

$$n = \frac{a}{2r}\sqrt{1+4u^2}\,, \quad n_1 = \frac{a}{2r}$$

Nella spirale iperbolica

$$ru = a\,, \qquad r' = -\frac{a}{u^2}$$

d'onde

$$t = -\frac{a}{u}\sqrt{1+u^2}\,, \qquad t_1 = -a$$

$$n = \frac{a}{u^2}\sqrt{1+u^2}\,, \qquad n_1 = -\frac{a}{u^2}$$

Di qui si deduce che la spirale iperbolica ha la suttangente costante, come accade nella curva logaritmica.

Infine per una spiral logaritmica abbiamo

$$r = e^{\frac{u}{a}} \quad , \qquad r' = \frac{e^{\frac{u}{a}}}{a}$$

e perciò

$$t = r\sqrt{1 + a^2} \;, \qquad t_1 = ar$$

$$n = \frac{r}{a}\sqrt{1 + a^2} \;, \qquad n_1 = \frac{r}{a}$$

Volendo calcolare l'angolo v, che l'asse polare contiene con la tangente, si avrà

$$\text{tang}\, v = \frac{r'}{r} = \frac{1}{a}$$

dunque la spiral logaritmica ha la proprietà di aver costantemente inclinato sotto il medesimo angolo la tangente con il raggio vettore.

Per mostrare un maggior numero di applicazioni, prendiamo l'ellissi del Cassini rappresentata dall'equazione polare

$$r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2u + a^4 = b^4$$

dalla quale per la derivazione rapporto ad u, abbiamo

$$r' = -\frac{a^2 r \,\text{sen}\, 2u}{r^2 - a^2 \cos 2u}$$

d'onde

$$(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{b^2 r}{r^2 - a^2 \cos 2u}$$

quindi le quattro rette più volte nominate diverranno

$$t = -\frac{b^2 r}{a^2 \operatorname{sen} 2u}, \quad t_1 = -\frac{r(r^2 - a^2 \cos 2u)}{a^2 \operatorname{sen} 2u}$$

$$n = \frac{b^2 r}{r^2 - a^2 \cos 2u}, \quad n_1 = -\frac{a^2 r \operatorname{sen} 2u}{r^2 - a^2 \cos 2u}$$

Di queste quattro rette la sola normale si può esprimere in funzione razionale del raggio vettore r: infatti dall' equazione della curva si ha

$$\cos 2u = \frac{r^4 + a^4 - b^4}{2a^2 r^2}$$

e quindi

$$n = \frac{2r^3 b^2}{r^4 - a^4 + b^4}$$

Quando sia $a = b$, l'ovale del Cassini si riduce alla lemniscata di Bernoulli, ed allora diverse proprietà interessanti di questa curva si scoprono, e provenienti in particolare dalle inclinazioni delle normali con l'asse delle ascisse.

Consideriamo adunque una lemniscata di equazione

$$r^2 = a^2 \cos 2u$$

la quale si ottiene dalla precedente per la supposizione di $a = b$, e per la sostituzione di $\frac{a}{\sqrt{2}}$ invece di a si avrà dalla derivazione

$$r' = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2u}{r}, \quad \frac{r'}{r} = -\operatorname{tang} 2u$$

quindi per le quattro rette in questione sarà

$$t = -\frac{1}{\tang 2u}\sqrt{r^2 + r^2 \tang^2 2u} = -\frac{r}{\sen 2u}, \quad t_1 = -\frac{a^2 r \cos 2u}{r \tang 2u}$$

$$n = \frac{a^2}{r}, \qquad n_1 = -r \tang 2u$$

Ora dall'equazione della curva

$$\cos 2u = \frac{r^2}{a^2}, \quad \sen 2u = \frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{a^2}$$

d'onde

$$\tang 2u = \frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{r^2}$$

e perciò

$$t = -\frac{a^2 r}{\sqrt{a^4 - r^4}}, \quad t_1 = -\frac{r^3}{\sqrt{a^4 - r^4}}$$

$$n = \frac{a^2}{r}, \qquad n_1 = -\frac{1}{r}\sqrt{a^4 - r^4}$$

Di qui si vede che nella lemniscata il semiasse è medio proporzionale geometrico fra il raggio vettore, e la normale fino all'incontro dell'asse polare. Nella medesima curva è interessante di conoscere l'angolo φ' che la normale forma con l'asse delle ascisse: ciò otterremo dall'ultima formola stabilita al parag. 173, vale a dire

$$\tang(\varphi' + u) = \frac{r'}{r}$$

la quale nel nostro caso diviene

$$\tang(\varphi' + u) = -\tang 2u$$

Gli angoli φ', ed u sono di segno contrario, e perciò potremo prendere

$$\varphi' + u = -2u\,, \qquad \text{ovvero} \qquad \varphi' = 3u$$

dunque nella lemniscata l'angolo formato dalla normale con l' asse $2a$ è triplo dell' angolo formato dalla corda condotta dall'origine al medesimo punto della curva. Non sarà inutile d'indicare qui, come la stessa equazione a coordinate ortogonali ci conduca alla medesima conclusione : infatti dall'equazione

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$$

si ha

$$2(x^2 + y^2)\,(x + yy') = a^2\,(x - yy')$$

d'onde

$$y' = \frac{x}{y}\,\frac{a^2 - 2(r^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2) + a^2}$$

Ora osservando che

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{1}{y'}\,, \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = r\cos u\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,u\,, \qquad r^2 = a^2\cos 2u$$

si troverà

$$\operatorname{tang}\varphi' = \operatorname{tang} u\,\frac{(1 + 2\cos 2u)}{1 - 2\cos 2u}$$

ove sostituendo

$$\cos 2u = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 u}{1 + \operatorname{tang}^2 u}$$

verrà finalmente

$$\operatorname{tang}\varphi' = \operatorname{tang} u\,\frac{(3 - \operatorname{tang}^2 u)}{3\operatorname{tang}^2 u - 1} = -\operatorname{tang} 3u$$

come già si trovò per altre considerazioni.

177.° Fra le diverse espressioni del raggio di curvatura, scegliamo primieramente

$$\rho = \pm \frac{(dx^2 + dy^2 + 2dx\,dy\cos A)^{\frac{3}{2}}}{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,\text{sen}\,A}$$

la quale sussiste qualunque sia la scelta della variabile indipendente, della quale sieno funzioni le due coordinate rettilinee x, y. Differenziando di nuovo gli ottenuti valori di dx, dy sarà

$$d^2x = \frac{\text{sen}(A-u)\,(d^2r - rdu^2) - \cos(A-u)\,(rd^2u + 2dr\,du)}{\text{sen}\,A}$$

$$d^2y = \frac{\text{sen}\,u\,(d^2r - rdu^2) + \cos u\,(rd^2u + 2dr\,du)}{\text{sen}\,A}$$

d'onde si ricaverà con facilità dopo brevi riduzioni

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{r(dr\,d^2u - du\,d^2r) + (2dr^2 + r^2du^2)du}{\text{sen}\,A}$$

e per conseguenza dopo tutte le convenienti sostituzioni avremo

$$\rho = \pm \frac{(dr^2 + r^2\,du^2)^{\frac{3}{2}}}{r(dr\,d^2u - du\,d^2r) + (2dr^2 + r^2\,du^2)du}$$

Alla medesima formola si arriva, se nei valori di dx, dy, d^2x, d^2y assumiamo $u = \frac{\pi}{2}$, mentre allora

$$dx = -\frac{(\cos A\,dr - r\,\text{sen}\,A\,du)}{\text{sen}\,A}, \quad dy = \frac{dr}{\text{sen}\,A}$$

$$d^2x = -\frac{\big(\cos A(d^2r - rdu^2) + \text{sen}\,A\,(rd^2u + 2dr\,du)\big)}{\text{sen}\,A}$$

$$d^2y = \frac{d^2r - r\,du^2}{\text{sen}\,A}.$$

dalle quali si forma egualmente la differenza

$$dx\, d^2y - dy\, d^2x$$

Nell'ipotesi degli assi ortogonali abbiamo anche con più semplicità

$$dx = - r du\,, \quad dy = dr$$

$$d^2x = -(r\, d^2u + 2dr\, du)\,, \quad d^2y = d^2r - r\, du^2$$

Non sarà inutile qui di osservare, come richiamando l'espressione del raggio di curvatura

$$\rho = \pm \frac{ds}{d\varphi}$$

che sussiste in qualunque sistema di coordinate rettilinee si potrà con gran facilità trasformare in coordinate polari per mezzo della formola generale

$$\text{tang}\,(\varphi - u) = \frac{rdu}{dr}.$$

Ed infatti, essendo

$$\varphi - u = \text{arc tang}\, \frac{rdu}{dr}$$

avremo dalla differenziazione

$$d\varphi = du + \frac{d\,\dfrac{rdu}{dr}}{1 + \dfrac{r^2\, du^2}{dr^2}}$$

ove eseguite le differenziazioni sarà

$$d\varphi = \frac{r(dr\, d^2u - du\, d^2r) + (2dr^2 + r^2\, du^2)du}{dr^2 + r^2\, du^2}$$

e siccome

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, du^2}$$

così formando il rapporto di ds a $d\varphi$ saremo ricondotti allo stabilito valore di ρ. Per introdurre le funzioni derivate del raggio vettore r, avvertiremo, che

$$r' = \frac{dr}{du}\ , \qquad r'' = \frac{du\, d^2r - dr\, d^2u}{du^3}$$

e perciò

$$\rho = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 - rr'' + 2r'^2}$$

Quante volte si fosse preso du costante, ossia $d^2u = o$, allora la prima espressione di ρ diviene

$$\rho = \pm \frac{(dr^2 + r^2\, du^2)^{\frac{3}{2}}}{2du\, dr^2 + r^2\, du^3 - r du\, d^2r}$$

e sostituendoci

$$r' = \frac{du}{dr}\ , \quad r'' = \frac{d^2u}{dr^2}$$

tornerà il valore di ρ espresso per le funzioni derivate del raggio r. Aggiungiamo che per la perpendicolare h abbassata dal polo sulla direzione della tangente fu veduto nel precedente parag. 175 essere

$$h = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

quale differenziata rapporto ad u, e ridotta, sarà

$$dh = \frac{r dr\, (r^2 - rr'' + 2r'^2)}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e che evidentemente si riduce ad

$$dh = \frac{rdr}{\rho}, \quad \text{ossia} \quad \rho = \frac{rdr}{dh}$$

Quest'ultima espressione del raggio di curvatura è d'accordo con quanto fu stabilito al parag. 148, facendo uso delle coordinate rettilinee.

178.° Fermiamoci brevemente sulla ricerca delle evolute delle curve riferite a coordinate polari: senza togliere nulla alla generalità supporremo che il sistema delle coordinate rettilinee sia ortogonale; quindi se X, Y sono le coordinate rettangolari del centro del circolo osculatore, ed R, U, le polari, sarà

$$X = R \cdot \cos U \;, \qquad Y = R \operatorname{sen} U$$

per cui l'espressione generale del raggio ρ determinata dall'equazione

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = \rho^2$$

si trasformerà in

$$(R \cos U - r \cos u)^2 + (R \operatorname{sen} U - r \operatorname{sen} u)^2 = \rho^2$$

e che si potrà porre anche sotto la forma

$$\Big(R \cos (U - r) - r\Big)^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 (U - u) = \rho^2$$

Ora il raggio di curvatura ρ è nella direzione della normale, e perciò all' ultima formola del parag. 173 dovremo aggiungere

$$\frac{R \cos (U - u) - r}{-rdu} = \frac{R \operatorname{sen}' (U - u)}{dr}$$

d'onde

$$\frac{R \cos(U-u)-r}{-r\,du} = \frac{R \operatorname{sen}(U - u)}{dr} = \pm \frac{\rho}{\sqrt{dr^2 + r^2\,du^2}}$$

ovvero

$$\frac{R\cos(U-u)-r}{-rdu}=\frac{R\operatorname{sen}(U-u)}{dr}=\frac{dr^2+r^2du^2}{r(drd^2u-dud^2r)+(2dr^2+r^2du^2)du}$$

Sostituendoci le derivate del raggio r, dedurremo i valori

$$R\operatorname{sen}(U-u)=r'\left(\frac{r^2+r'^2}{2r'^2-rr''+r^2}\right)$$

$$R\cos(U-u)=r\left(\frac{r'^2-rr''}{2r'^2-rr''+r^2}\right)$$

Con queste due formole eliminando la r ed u si arriva ad una relazione fra le coordinate polari R, U, la quale appartiene alla linea dei centri di curvatnra, o ciò che torna lo stesso, rappresenterà l'evoluta della curva proposta.

Per alcune applicazioni può essere più vantaggioso di sostituire due altre equazioni le quali provengono dal dividere la prima per la seconda, e dal fare la somma dei quadrati; in questa guisa sarà

$$\operatorname{tang}(U-u)=\frac{r'(r^2+r'^2)}{r(r'^2-rr'')}.$$

$$R^2=\frac{r'^2(r^2+r'^2)^2+r^2(r'^2-rr'')^2}{(2r'^2-rr''+r^2)^2}$$

Introducendo nelle stesse due formole il raggio di curvatura ρ, e l'angolo v che contiene il raggio vettore con la tangente, determinato dalle formole del parag. 175 dedurremo con gran facilità

$$R\operatorname{sen}(U-u)=\pm\rho\operatorname{sen}v$$

$$R\cos(U-u)-r=\mp\rho\cos v$$

Termineremo questo parag. col far riflettere che la maggior parte delle formole, e delle espressioni ottenute in queste ricerche sulle coordinate polari si sarebbero potute ricavare da considerazioni geometriche, ed il calcolo analitico proverebbe una semplificazione facendo una combinazione dei differenziali del primo, e del secondo ordine delle espressioni immaginarie conjugate

$$x + y\sqrt{-1} = r(\cos u + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, u) = re^{u\sqrt{-1}}$$

$$x - y\sqrt{-1} = r(\cos u - \sqrt{-1}\,\text{sen}\, u) = re^{-u\sqrt{-1}}$$

179.° Le principali applicazioni dei raggi di curvatura, e delle evolute si faranno per le quattro spirali di già menzionate e per la lemniscata. Nella spirale di Archimede

$$r = au\,, \quad r' = a\,, \quad r'' = 0$$

quindi per il raggio di curvatura

$$\rho = \frac{a(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}{2+p^2}$$

come per l'evoluta avranno luogo l'equazioni

$$\text{tang}\,(U - u) = u + \frac{1}{u}$$

$$R^2 = a^2\,\frac{u^2 + (1+u^2)^2}{(2+u^2)^2} = a^2\left(1 - \frac{1}{2+u^2} - \frac{1}{(2+u^2)^2}\right)$$

Volendo aggiungere l' angolo v, che la tangente forma con l'asse polare, si avrà

$$\text{tang}\, v = \cot(\varphi - u) = \frac{1}{u}$$

Da queste differenti formole si vede, che per un valore

nullo dell'angolo u

$$\text{tang}\, v = \cot(\varphi - u) = \text{tang}\,(U - u) = \frac{1}{0}$$

$$v = \frac{\pi}{2} \qquad \rho = R = \frac{a}{2}$$

e per un valore infinitamente grande di u

$$\text{tang}\, v = 0\,, \quad v = 0\,, \quad \text{tang}\,(U - u) = \frac{1}{0}\,, \ \rho = \infty\,, \ R = a$$

dunque all'origine delle coordinate la spirale di Archimede tocca l'asse polare: crescendo poi l'angolo u, diminuirà indefinitamente v, e la curvatura $\frac{1}{\rho}$; ed il raggio polare R condotto dal centro di curvatura all'origine crescerà continuamente, ma sarà sempre compreso fra i valori $R = a$, ed $R = \frac{a}{2}$.

Per ottenere l'equazione della evoluta basterà dal valore di R^2 risolvere l'equazione di secondo grado rapporto ad $\frac{1}{2 + u^2}$; ed avremo

$$\left(\frac{1}{2 + u^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 + u}\right) = 1 - \frac{R^2}{a^2}$$

d'onde per il segno $+$

$$\frac{1}{2 + u^2} = \frac{-1 + \sqrt{5 - \frac{4R^2}{a^2}}}{2}$$

Da questa ultima ricavando il valore di u, e sostituito nella formola

$$\text{tang}\,(U - u) = u + \frac{1}{u}$$

si otterrà la richiesta equazione polare dell'evoluta della spirale di Archimede.

Per la spirale parabolica

$$r^2 = au$$

avremo

$$r' = \frac{a}{2r}, \quad r'' = -\frac{a^2}{4r^3}$$

d'onde per il raggio di curvatura

$$\rho = \frac{(4r^4 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{2r(4r^4 + 3a^2)} = \frac{a}{2r}\,\frac{(1 + 4u^2)^{\frac{3}{2}}}{(3 + 4u^2)}$$

Nello stesso modo per la spirale iperbolica di equazione

$$ru = a$$

abbiamo

$$r' = -\frac{a}{u^2} = -\frac{r^2}{a}, \quad r'' = \frac{2a}{u^3} = \frac{2r^3}{a^2}$$

Con questi valori il raggio di curvatura diviene

$$\rho = \frac{r(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}$$

ovvero

$$\rho = \frac{a(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}{u^4}$$

Fra le spirali sceglieremo infine la logaritmica

$$r = e^{\frac{u}{a}}$$

d'onde

$$r' = \frac{r}{a}, \qquad r'' = \frac{r}{a^2}, \ldots$$

e perciò

$$\rho = \frac{r}{a}\sqrt{1+a^2} = n$$

$$R \operatorname{sen}(U-u) = \frac{r}{a}, \quad R\cos(U-u) = o$$

dunque nella spirale logaritmica il raggio di curvatura è costantemente eguale alla normale. Dalle ultime due equazioni che contengono l'evòluta della spirale deduciamo

$$\cos(U-u) = o, \qquad \operatorname{sen}(U-u) = 1$$

e perciò

$$R = \frac{r}{a}, \quad r = aR$$

L'angolo $U-u$ potrà essere

$$U-u = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ed} \qquad u = U - \frac{\pi}{2}$$

Prendendo adunque i valori di r, u, e sostituiti nell'equazione della spiral logaritmica, troveremo

$$aR = e^{\frac{U-\frac{\pi}{2}}{a}}$$

ovvero

$$R = e^{\frac{1}{a}\left(U-\frac{\pi}{2}-a\log a\right)}$$

e ponendo l'angolo

$$U - \frac{\pi}{2} - a\log a = U_1$$

verrà per la linea dei centri di curvatura

$$R = e^{\frac{U_1}{a}}$$

In questa equazione la costante a essendo commune a quella della curva $r = e^{\frac{u}{a}}$ si concluderà, che l'evoluta della spiral logaritmica è un'altra spiral logaritmica di dimensioni eguali alla precedente, od in altri termini la spiral logaritmica è evoluta di se stessa. Questo risultato è d'accordo con quanto si trovò per la medesima curva alla fine del parag. 158 dalla considerazione delle coordinate ortogonali.

Consideriamo adesso la curva ovale del Cassini, di equazione polare

$$r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2u + a^4 = b^4$$

Facendo la derivazione rapporto ad u, troviamo con facilità

$$r' = -\frac{a^2 r \operatorname{sen} 2u}{r^2 - a^2 \cos 2u}$$

d'onde

$$(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{b^2 r}{r^2 - a^2 \cos 2u}$$

Se come si è fatto al parag. 175 si chiami v l'angolo acuto compreso fra la tangente e l'asse polare, avremo le formole

$$\operatorname{sen} v = \frac{r'}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos v = \frac{r}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

le quali nel nostro caso diverranno

$$\operatorname{sen} v = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2u}{b^2}, \quad \cos v = \frac{r^2 - a^2 \cos 2u}{b^2}$$

Inoltre nello stesso parag. 175 per la perpendicolare h abbassata dall'origine sulla direzione della tangente si ha

$$h = \frac{r^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ove sostituendo i trovati valori, si avrà

$$h = \frac{r(r^2 - a^2 \cos 2u)}{b^2}$$

ed eliminando cos $2u$ per mezzo dell'equazione della curva, diverrà

$$h = \frac{r^4 - a^4 + b^4}{2b^2 r}$$

Differenziando la proposta espressione, avremo

$$dh = \frac{dr}{2b^2}\left(\frac{3r^4 - b^4 + a^4}{r^2}\right)$$

Da questo valore possiamo ottenere immediatamente il raggio di curvatura ; in fatti per ogni curva si ha in generale

$$\rho = \frac{rdr}{dh}$$

e perciò

$$\rho = \frac{2b^2 r^3}{3r^4 - b^4 + a^4}$$

Che se dall'equazione della curva si elimini la differenza $a^4 - b^4$, risulterà in fine per il raggio di curvatura della curva ovale del Cassini, l'espressione

$$\rho = \frac{b^2 r}{r^2 + a^2 \cos 2u}$$

Di qui come fa avvertire il sig. *Serret* (*) il raggio di curvatura diverrà infinito in quei punti, ove la curva incontra la lemniscata di equazione

$$r^2 + a^2 \cos 2u = 0$$

in modo che i valori communi di questa lemniscata, e della curva proposta, faranno conoscere le coordinate polari dei punti d'inflessione della medesima. Questi punti corrispondono ai valori

$$r^4 = \frac{b^4 - a^4}{3}, \qquad \cos 2u = -\sqrt{\frac{b^4 - a^4}{3a^4}}$$

Di qui si vede che la curva avrà quattro punti d'inflessione quando il rapporto $\frac{b}{a}$ sia compreso fra 1, e $\sqrt{2}$; dunque rimanendo a, costante, e variando il rapporto $\frac{b}{a}$ fra i limiti 1, e $\sqrt{2}$, l'equazione della ovale del Cassini rappresenterà una serie di curve della medesima specie, le quali ammetteranno respettivamente quattro punti d'inflessione, dei quali il luogo geometrico sarà la lemniscata di equazione

$$r^2 + a^2 \cos 2u = 0.$$

Il sig. Serret a diverse altre interessanti ricerche estende questi risultati per tutte quelle curve nelle quali la definizione geometrica è che il prodotto delle distanze di uno dei suoi punti, da m punti fissi sia costante. L'equazioni delle quali dipende la curva evoluta, possono essere

$$R \operatorname{sen} (U - u) = \rho \operatorname{sen} v$$

$$R \cos (U - u) - r = - \rho \cos v$$

(*) Liouville journal Avril 1843.

le quali per la sostituzione dei valori di ρ, sen$v$, cos$v$, daranno

$$R \operatorname{sen}(U - u) = -\frac{a^2 r \operatorname{sen} 2u}{r^2 + a^2 \cos 2u}$$

$$R \cos(U - u) = \frac{2a^2 r \cos 2u}{r^2 + a^2 \cos 2u}$$

Se da queste espressioni, e dall'equazione della curva si eliminino le coordinate polari r, u, giungeremo ad un' equazione fra le nuove coordinate R, U, la quale rappresenterà l'evoluta della curva Cassiniana. Se si divida la prima per la seconda, e si faccia la somma dei quadrati avremo le formole

$$\operatorname{tang}(U - u) = -\frac{\operatorname{tang} 2u}{2}$$

$$R^2 = \frac{a^4 r^2 (\operatorname{sen}^2 2u + 4\cos^2 2u)}{(r^2 + a^2 \cos 2u)^2}$$

Noi nel nuovo parag. ci tratterremo sulla prima di queste formole, la quale si presenta ancora nella lemniscata di Bernoulli.

180.° Prendiamo infine la lemniscata a coordinate polari

$$r^2 = a^2 \cos 2u$$

si avrà dalla derivazione

$$r' = -r \operatorname{tang} 2u = -\frac{r\sqrt{1 - \cos^2 2u}}{\cos 2u}$$

d'onde

$$r' = -\frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{r}$$

Proseguendo la derivazione, abbiamo

$$r'' = -\frac{2r}{\cos^2 2u} - r' \tang 2u = -\frac{(a^4 + r^4)}{r^3}$$

Con queste espressioni facilmente si trova

$$2r'^2 - rr'' + r^2 = 3(r^2 + r'^2) = \frac{3a^4}{r^2}$$

per mezzo delle quali il raggio di curvatura ρ, ed alcune formole del parag. 178 diverranno

$$\rho = \frac{a^2}{3r}$$

$$R \operatorname{sen}(U - u) = -\frac{r \tang 2u}{3} = -\frac{a \operatorname{sen} 2u}{3\sqrt{\cos 2u}}$$

$$R \cos(U - u) = \frac{2}{3} r = \frac{2a \cos 2u}{3\sqrt{\cos 2u}}$$

L'espressione del raggio di curvatura della lemniscata è eguale al terzo della normale alla curva riferita al suo asse polare. Riguardo poi all'evoluta della medesima a coordinate polari converrà eliminare l'angolo u, fra le due equazioni. Per meglio conoscere i rapporti che passano fra le coordinate polari R, U, dell'evoluta, e l'angolo u, si divida la prima per la seconda, e si avrà

$$\tang(U - u) = -\frac{\tang 2u}{2}$$

Sostituendo in questa

$$\tang(U - u) = \frac{\tang U - \tang u}{1 + \tang U \tang u}$$

$$\tang 2u = \frac{2 \tang u}{1 - \tang^2 u}$$

e riducendo avremo

$$\tan g^3 u + \tan g\, U = o, \qquad \text{ossia} \qquad \tan g^3 u = -\tan g\, U$$

Tal'è la relazione, che deve sussistere fra i due angoli u, U. Eleviamo ora al quadrato le medesime espressioni che contengono la R, e si sommino, risulterà

$$R^2 = \frac{r^2}{9}(4 + \tan g^2 2u) = \frac{a^2}{9}\left(\frac{\text{sen}^2 2u + 4\cos^2 2u}{\cos 2u}\right)$$

Questa equazione polare rappresenterà l'evoluta della lemniscata dopo di aver eliminato l'angolo u, per mezzo della condizione

$$\tan g^3 u = -\tan g\, U.$$

Che se piuttosto vogliasi l'angolo u in funzione della R si elimini la r, ed avremo

$$R^2 = \frac{1}{9}\left(4a^2 \cos 2u + \frac{a^2\, \text{sen}^2\, 2u}{\cos 2u}\right)$$

dalla quale per la sostituzione di

$$\text{sen}^2\, 2u = 1 - \cos^2 2u$$

verrà l'equazione di secondo grado

$$\cos^2 2u - \frac{3R^2}{a^2}\cos 2u + \frac{1}{3} = o$$

Il valore dell'angolo u, ottenuto dalla risoluzione di questa equazione, e sostituito nella equazione di condizione

$$\tan g^3 u + \tan g\, U = o$$

somministrerà l'evoluta della lemniscata.

181.° Potendo forse interessare di conoscere le formole

dalle quali dipenda l'equazione dell'evoluta della lemniscata riferita a coordinate ortogonali, riprendiamo le formole del parag. 156, cioè

$$Y - y = \frac{dx}{d\varphi}, \quad X - x = -\frac{dy}{d\varphi}$$

ove φ è secondo il consueto, l'angolo formato con l'asse delle ascisse dalla retta tangente la curva al punto (x, y). Ora prendendo nella lemniscata

$$r^2 = a^2 \cos 2u, \quad x = r \cos u, \quad y = r \operatorname{sen} u$$

si ha egualmente

$$x = a \cos u \sqrt{\cos 2u}, \qquad y = a \operatorname{sen} u \sqrt{\cos 2u}$$

e dalla differenziazione

$$dx = -\frac{a \operatorname{sen} 3u\, du}{\sqrt{\cos 2u}}, \qquad dy = \frac{a \cos 3u\, du}{\sqrt{\cos 2u}}$$

Inoltre dal parag. 176 si deduce per l'angolo φ

$$\cot \varphi = -\operatorname{tang} 3u, \quad \text{e perciò} \quad d\varphi = 3du$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{a \operatorname{sen} 3u}{3\sqrt{\cos 2u}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{a \cos 3u}{3\sqrt{\cos 2u}}$$

Con questi valori verrà

$$X = \frac{a(3 \cos u \cos 2u - \cos 3u)}{\sqrt{\cos 2u}}$$

$$Y = \frac{a(\operatorname{sen} u \cos 2u - \operatorname{sen} 3u)}{\sqrt{\cos 2u}}$$

e che si riducono evidentemente ad

$$X = \frac{2a \cos^3 u}{3\sqrt{\cos 2u}}, \qquad Y = -\frac{2a \operatorname{sen}^3 u}{3\sqrt{\cos 2u}}$$

L'eliminazione dell'angolo u, porgerà un'equazione fra X ed Y, la quale apparterrà all'evoluta della lemniscata: a quest'oggetto si divida X, Y per $\frac{2a}{3}$, quindi si estragga la radice terza, e si elevi alla potenza seconda, si troverà

$$\left(\frac{3X}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\cos^2 u}{(\cos 2u)^{\frac{1}{3}}}, \quad \left(\frac{3Y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\operatorname{sen}^2 u}{(\cos 2u)^{\frac{1}{3}}}$$

Facendo la somma e la sottrazione verrà

$$\left(\frac{3X}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3Y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{(\cos 2u)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\left(\frac{3X}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{3Y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} = (\cos 2u)^{\frac{2}{3}}$$

e perciò elevando alla potenza seconda la prima espressione, si ricaverà

$$\left(\frac{3X}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{3Y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\left(\frac{3X}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3Y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^2}$$

Se si decomponga in due fattori eguali il denominatore e si porti fuori dei due vincoli radicali la quantità $\frac{2a}{3}$,

otterremo per la richiesta equazione dell'evoluta della lemniscata

$$\left(\sqrt[3]{X^4}-\sqrt[3]{Y^4}\right)\left(\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{Y^2}\right)=\frac{4a^2}{9}$$

Questa curva incontra l'asse delle x ad una distanza dall'origine, espressa per

$$X=\frac{2a}{3}$$

L'equazione differenziale della medesima curva la potremo ottenere facilmente dalla differenziazione dei valori di X, Y ciò che darà

$$dX=-\frac{2a}{3}\,\frac{\text{sen}\,u\cos u\,(\cos^3 u-3\,\text{sen}^2 u\cos u)\,du}{\sqrt{\cos^3 2u}}$$

$$dY=-\frac{2a}{3}\,\frac{\text{sen}\,u\cos u\,(3\cos^2 u\,\text{sen}\,u-\text{sen}^3 u)\,du}{\sqrt{\cos^3 2u}}$$

ovvero

$$dX=-\frac{2a}{3}\,\frac{\text{sen}\,u\cos u\cos 3u\,du}{\sqrt{\cos^3 2u}}$$

$$dY=-\frac{2a}{3}\,\frac{\text{sen}\,u\cos u\,\text{sen}\,3u\,du}{\sqrt{\cos^3 2u}}$$

di qui risulta evidentemente

$$\frac{dY}{dX}=\text{tang}\,3u$$

A questa ultima espressione si può giungere immediatamente col riflettere che fra i differenziali dx, dy di

una data curva, ed i differenziali dX, dY dell'evoluta si ha

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{dx}{dy}$$

e siccome per i precedenti valori di dx, dy nella lemniscata

$$\frac{dx}{dy} = -\text{tang } 3u$$

così il cercato rapporto coinciderà colla tangente dell'angolo triplo u. Per eliminare ora l'angolo u in funzione di Y, Y si rifletta che prendendo

$$X = R \cos U , \qquad Y = R \text{ sen } U$$

si giunge per mezzo dei due valori di X, Y in funzione di u, all'equazione di già trovata

$$\frac{Y}{X} = \text{tang } U = -\text{tang}^3 u$$

dalla quale ricavasi

$$\text{tang } u = \sqrt[3]{-\frac{Y}{X}} , \qquad \text{tang}^2 u = \sqrt[3]{\frac{Y^2}{X^2}}$$

Ma

$$\text{tang } 3u = \text{tang } u \left(\frac{3 - \text{tang}^2 u}{1 - 3 \text{ tang}^2 u}\right)$$

d'onde per la sostituzione

$$\text{tang } 3u = \frac{Y - 3\sqrt[3]{X^2 Y}}{X - 3\sqrt[3]{Y^2 X}}$$

e perciò l'equazione differenziale dell'evoluta della

lemniscata sarà

$$dY = dX\left(\frac{Y - 3\sqrt[3]{X^2Y}}{X - 3\sqrt[3]{Y^2X}}\right)$$

ovvero

$$\left(X - 3\sqrt[3]{Y^2X}\right)dY - \left(Y - 3\sqrt[3]{X^2Y}\right)dX = 0$$

Aggiungiamo in fine che l'eliminazione dell'angolo u nei due valori X, Y si può far dipendere ancora dalla risoluzione di due equazioni di terzo grado: infatti dai medesimi abbiamo

$$\left(\frac{3X}{2a}\right)^2 = \frac{\cos^6 u}{2\cos^2 u - 1}, \quad \left(\frac{3Y}{2a}\right)^2 = \frac{\operatorname{sen}^6 u}{1 - 2\operatorname{sen}^2 u}$$

ove facendo

$$\cos^2 u = z, \qquad \operatorname{sen}^2 u = \omega$$

otterremo le equazioni di terzo grado

$$z^3 - 2\left(\frac{3X}{2a}\right)^2 z + \left(\frac{3X}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\omega^3 + 2\left(\frac{3Y}{2a}\right)^2 \omega - \left(\frac{3Y}{2a}\right)^2 = 0$$

Prendendo le due radici z, ed ω reali, e numeriche si dedurrà l'equazione

$$z + \omega = 1$$

la quale rappresenterà l'evoluta della lemniscata riferita a coordinate ortogonali.

APPLICAZIONI ALLA GEOMETRIA ANALITICA A TRE DIMENSIONI

Della tangente, dei piani tangenti, ed in particolare del piano osculatore, delle normali, del piano normale, e della normale principale ad una curva qualunque in un punto dato.

182.° Riferendo i diversi punti di una curva qualunque situata nello spazio a tre assi coordinati, o rettangolari, od obliqui, potremo sempre considerarla rappresentata da due equazioni fra le tre coordinate x, y, z. Ciò posto ritenendo per x, y, z le coordinate di un punto qualunque della curva, denotiamo per Δx, Δy, Δz, gli incrementi simultanei attribuiti alle medesime x, y, z per passare da un punto ad un altro della curva; se si chiami k la corda, o secante condotta dal punto (x, y, z) al punto $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ è chiaro che fra gli incrementi Δx, Δy, Δz, e la secante k avremo alcune equazioni della forma

$$\frac{\Delta x}{\text{A}}=\frac{\Delta y}{\text{B}}=\frac{\Delta z}{\text{C}}=k$$

A, B, C, rappresenteranno i coseni degli angoli che la corda k forma con i tre assi nell' ipotesi che sieno ortogonali : e nel caso opposto saranno espresse ciascuna dei rapporti

$$\text{A}=\frac{\text{sen}\ k\ ,\ yz}{\text{sen}\ x\ ,\ yz},\quad \text{B}=\frac{\text{sen}\ k\ ,\ xz}{\text{sen}\ y\ ,\ xz},\quad \text{C}=\frac{\text{sen}\ k\ ,\ xy}{\text{sen}\ z\ ,\ xy}$$

È molto facile di stabilire differenti altre equazioni che possono aver luogo fra gli incrementi Δx, Δy, Δz, k, e quindi anche fra le funzioni trigonometriche a, b, c. Così conducendo dagli estremi di Δx, Δy, Δz tre perpendicolari sopra la corda k, e chiamando A, B, C i coseni degli angoli che la medesima forma con i tre assi obliqui, noi avremo

$$k = A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z$$

d'onde immediatamente dall'eliminazione di Δx, Δy, Δz

$$1 = aA + bB + cC$$

Di più se ε, ε', ε'' sieno i tre angoli rettilinei formati dagli assi xy, xz, yz, ed abbassate dall'estremità della secante k una perpendicolare sopra ciascuno degli assi, si avrà ancora

$$Ak = \Delta x + \Delta y \cos\varepsilon + \Delta z \cos\varepsilon'$$

$$Bk = \Delta y + \Delta x \cos\varepsilon + \Delta z \cos\varepsilon''$$

$$Ck = \Delta z + \Delta x \cos\varepsilon' + \Delta y \cos\varepsilon''$$

dalle quali per la consueta eliminazione deduciamo

$$A = a + b\cos\varepsilon + c\cos\varepsilon'$$

$$B = b + a\cos\varepsilon + c\cos\varepsilon''$$

$$C = c + a\cos\varepsilon' + b\cos\varepsilon''$$

Moltiplicando ora per k il valore dello stesso k espresso per Δx, Δy, Δz, e sostituendoci nel secondo membro i valori trovati per kA, kB, kC, si otterrà

$$k^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + 2\Delta x\,\Delta y \cos\varepsilon$$
$$+ 2\Delta x\,\Delta z \cos\varepsilon' + 2\Delta y\,\Delta z \cos\varepsilon''$$

Di qui fra le funzioni trigonometriche A, B, C avrà luogo l'equazione

$$1 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB\cos\varepsilon + 2AC\cos\varepsilon' + 2BC\cos\varepsilon''$$

Il valore di k, o di k^2 non è altro che la diagonale del parallelepipedo obliquangolo di lati Δx, Δy, Δz, congiunti ad angoli rispettivi, ε, ε', ε''. Se per maggior semplicità pongasi

$$\xi = x + y\cos\varepsilon + z\cos\varepsilon'$$

$$\eta = y + x\cos\varepsilon + z\cos\varepsilon''$$

$$\zeta = z + x\cos\varepsilon' + y\cos\varepsilon''$$

si avrà

$$\Delta\xi = Ak,\ \Delta\eta = Bk,\ \Delta\zeta = Ck$$

ed il precedente valore di k^2 si trasformerà in

$$k^2 = \Delta x\,\Delta\xi + \Delta y\,\Delta\eta + \Delta z\,\Delta\zeta$$

Dalla quale ritorna la relazione di già trovata

$$1 = \mathrm{a}A + \mathrm{b}B + \mathrm{c}C$$

Per mezzo di queste differenti espressioni noi ricaveremo dall'equazioni

$$\frac{\Delta x}{\mathrm{A}} = \frac{\Delta y}{\mathrm{B}} = \frac{\Delta z}{\mathrm{C}} = k$$

per le funzioni trigonometriche A, B, C i valori

$$\mathrm{A} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x\Delta\xi + \Delta y\Delta\eta + \Delta z\Delta\zeta}},\quad \mathrm{B} = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x\Delta\xi + \Delta y\Delta\eta + \Delta z\Delta\zeta}}$$

$$\mathrm{C} = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x\Delta\xi + \Delta y\Delta\eta + \Delta z\Delta\zeta}}$$

Quando gli assi sono ortogonali, allora chiamando α, β, γ gli angoli che la corda k forma con i medesimi, si avrà

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

ove

$$k^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Tali sono le diverse formole, che sussistono fra le quantità Δx, Δy, Δz .. e k.

183.° Supponiamo adesso che il punto

$$(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

vada accostandosi indefinitamente al punto (x, y, z); in questo caso la secante verrà a confondersi con una certa retta, che dicesi *tangente* alla curva data, e la tocca al punto x, y, z; quindi per ottenere le funzioni trigonometriche a, b, c simili alle A, B, C le quali determinino la direzione della retta tangente rapporto ai tre assi basterà cercare i limiti verso quali convergono i medesimi valori di A, B, C per la supposizione di Δx, Δy, Δz, nulli, e si troverà come già si è praticato per le curve piane

$$a = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dxdy\cos\varepsilon + 2dxdz\cos\varepsilon' + 2dydz\cos\varepsilon''}}$$

$$b = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dxdy\cos\varepsilon + 2dxdz\cos\varepsilon' + 2dydz\cos\varepsilon''}}$$

$$c = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dxdy\cos\varepsilon + 2dxdz\cos\varepsilon' + 2dydz\cos\varepsilon''}}$$

Nell'ipotesi degli assi ortogonali, a, b, c rappresenteranno i coseni degli angoli α, β, γ che la tangente forma con gli stessi assi, e le precedenti espressioni si ridurranno ad

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

Di più chiamando s l'arco computato da un punto fisso fino al punto (x, y, z), ed immaginando l'arco Δs compreso fra i due punti (x, y, z), $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ infinitamente vicini, è chiaro che per il tratto Δs infinitamente piccolo della curva, il limite del rapporto dell'arco Δs alla corrispondente corda k sarà eguale all'unità, e perciò

$$1 = \lim \frac{\Delta s}{k} =$$

$$\lim \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + 2\Delta x\Delta y\cos\varepsilon + 2\Delta x\Delta z\cos\varepsilon' + 2\Delta y\Delta z\cos\varepsilon''}}$$

Qualunque sia la variabile indipendente, si potrà sempre dedurre per la cognita definizione dei differenziali

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dxdy\cos\varepsilon + 2dxdz\cos\varepsilon' + 2dydz\cos\varepsilon''}$$

così supponendo y, e z funzioni della x, otterremo

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2 + z'^2 + 2y'\cos\varepsilon + 2z'\cos\varepsilon' + 2y'z'\cos\varepsilon''}$$

In qualunque ipotesi le funzioni trigonometriche a, b, c, diverranno

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}; \quad c = \frac{dz}{ds}$$

ovvero

$$\frac{a}{dx}=\frac{b}{dy}=\frac{c}{dz}=\frac{1}{ds}$$

e nell'ipotesi degli assi ortogonali, si riducono a

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}$$

d'onde

$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos\beta}{dy}=\frac{\cos\gamma}{dz}=\frac{1}{ds}$$

Da tutte queste diverse formole rimane determinata la direzione della tangente rapporto ai tre assi; per conoscere poi l'equazione della medesima retta tangente, sieno X, Y, Z le coordinate di un suo punto qualunque, noi avremo

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}$$

dalla quale

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

Tal'è l'equazione della retta tangente una curva situata nello spazio, in un punto dato (x, y, z) per un qualunque sistema di assi, e qualunque sia la variabile indipendente. Alla medesima equazione si può anche giungere osservando che la curva nello spazio è data quando vengono date le curve di projezione nei tre piani, cosicchè prendendo x per variabile indipendente si abbia per le curve di projezione nei piani yx, zx

$$y=\psi(x), \qquad z=\chi(x)$$

e siccome per un principio di geometria la projezione

della tangente ad una curva qualunque sopra un dato piano coincide con la tangente alla curva projettata nel medesimo piano ; così per l'equazioni alla tangente delle due proposte curve nei punti (x, y) ed (x, z) sarà

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{X-y}{dy}, \frac{X-x}{dx}=\frac{Z-z}{dz}$$

Qneste formole, che sussistono qualnnque sia la variabile indipendente della qnale sieno funzioni le x, y, z conducono immediatamente ad

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

come già si era trovato antecedentemente.

184.° Un piano dicesi *tangente* ad una curva qualunque in un dato punto, quando passi per la retta tangente a questo punto ; di qui ne segue che una curva tracciata nello spazio potrà avere in ogni suo punto un infinità di piani tangenti ; ma fra questi ve ne ha uno che merita un' attenzione particolare , e che suol chiamarsi piano *osculatore*. La natura del piano osculatore ad un qualsiasi pnnto della curva verrà definita dalla ricerca del limite verso il quale converge un piano che passi per tre punti infinitamente vicini della curva , e che noi esprimeremo simbolicamente per

$$(x, y, z), \ \big((1+\Delta)x, (1+\Delta)y, (1+\Delta)z\big)$$
$$\big((1+\Delta)^2x, (1+\Delta)^2y, (1+\Delta)^2z\big)$$

in modo che questi tre sistemi di coordinate dovranno verificare per i coefficienti A , B , C del piano le tre

equazioni

$$Ax+By+Cz=k\,,\quad A(1+\Delta)x+B(1+\Delta)y+C(1+\Delta)z=k$$

$$A(1+\Delta)^2x+B(1+\Delta)^2y+C(1+\Delta)^2z=k$$

Queste due ultime simboliche si ridurranno in forza della prima, ad

$$A\,\Delta x+B\,\Delta y+C\,\Delta z=0$$

$$A\,\Delta^2 x+B\,\Delta^2 y+C\,\Delta^2 z=0$$

dalle quali deduciamo un rapporto fra i tre coefficienti A, B, C onde il piano passi per i tre nominati punti: il rapporto in questione è dato evidentemente dalle frazioni

$$\frac{A}{\Delta y\,\Delta^2 z-\Delta z\,\Delta^2 y}=\frac{B}{\Delta z\,\Delta^2 x-\Delta x\,\Delta^2 z}=\frac{C}{\Delta x\,\Delta^2 y-\Delta y\,\Delta^2 x}$$

Immaginiamo ora che i tre punti concorrono verso il punto unico (x, y, z) della curva, allora il piano in proposito convergerà verso la direzione di un piano tangente alla curva, completamente determinato di posizione, e che noi chiameremo piano *osculatore* alla curva in quel punto. Per ottenere questo passaggio basterà dividere primieramente i denominatori delle tre frazioni per α^3, ove α sia il consueto infinitesimo ausiliare, e quindi cercare i limiti verso i quali convergono le medesime tre frazioni per l'annullamento di Δx, Δy, Δz; ora ritenendo che A, B, C seguitano a rappresentare i limiti verso i quali convergono le funzioni trigonometriche A, B, C; sarà dall'equazioni

$$dx=\lim\frac{\Delta x}{\alpha}\,,\quad d^2x=\lim\frac{\Delta^2 x}{\alpha^2}\,,\;\ldots\ldots$$

per i coefficienti A, B, C del piano osculatore

$$\frac{A}{dy\, d^2z - dz\, d^2y} = \frac{B}{dz\, d^2x - dx\, d^2z} = \frac{C}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$$

Se x, y, z sieno le coordinate del punto di contatto, ed X, Y, Z le coordinate di un punto qualunque del piano è evidente che l'equazione generale di questo piano sarà della forma

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z)$$

dunque l'equazione del piano osculatore la curva nel punto (x, y, z) si riduce ad

$$(X - x)(dy\, d^2z - dz\, d^2y) + (Y - y)(dz\, d^2x - dx\, d^2z)$$
$$+ (Z - z)(dx\, d^2y - dy\, d^2x) = 0$$

Ognun vede che fra gl' infiniti piani tangenti la curva nel punto (x, y, z) questo solo è completamente determinato: quando la curva sia piana, il piano osculatore, ed il piano della curva sono coincidenti; le precedenti equazioni sussistono qualunque sia la variabile indipendente, e qualunque sia la scelta delle coordinate rettilinee, e si potranno scrivere anche più brevemente i valori di A, B, C, con

$$\frac{A}{dy^2\left(d\dfrac{dz}{dy}\right)} = \frac{B}{dz^2\left(d\dfrac{dx}{dz}\right)} = \frac{C}{dx^2\left(d\dfrac{dy}{dx}\right)}$$

185.° Una retta dicesi *normale* alla curva in un punto (x, y, z), quando è perpendicolare alla retta tangente nel punto di contatto. Ora è chiaro che per uno stesso punto di curva a doppia curvatura si potrà condurre un numero infinito di rette perpendicolari, o normali,

le quali sono tutte comprese in un piano che passa perpendicolarmente per lo stesso punto (x, y, z); per questo motivo il piano in questione dicesi *piano normale*: la sua equazione sarà della forma

$$A_1 (X - x) + B_1 (Y - y) + C_1 (Z - z) = o$$

e la determinazione dei coefficienti dipende dalla condizione analitica, che d'esso sia perpendicolare alla retta tangente

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}$$

Ora per quanto si sa dalla geometria analitica i coefficienti A_1, B_1, C_1 dovranno soddisfare all'equazione comune

$$\frac{A_1}{dx + dy \cos \varepsilon + dz \cos \varepsilon'} = \frac{B_1}{dy + dx \cos \varepsilon + dz \cos \varepsilon''}$$

$$= \frac{C_1}{dz + dx \cos \varepsilon' + dy \cos \varepsilon''}$$

quali in forza dei valori ξ, η, ζ stabiliti al parag. 182 diverranno

$$\frac{A_1}{d\xi} = \frac{B_1}{d\eta} = \frac{C_1}{d\zeta}$$

d'onde l'equazione cercata del piano normale

$$(X - x)\, d\xi + (Y - y)\, d\eta + (Z - z)\, d\zeta = o.$$

Quando gli assi sieno ortogonali si avrà semplicemente

$$(X - x)\, dx + (Y - y)\, dy + (Z - z)\, dz = o$$

Si moltiplichino adesso le respettive differenze delle coordinate per $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, e si conduca dall'origine delle

coordinate un raggio vettore ρ al punto (x, y, z), avremo

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos \varepsilon + 2xz \cos \varepsilon' + 2yz \cos \varepsilon''$$

quindi differenziando, e dividendo per 2, l'equazione del piano normale si trasformerà in

$$X\, d\xi + Y\, d\eta + Z\, d\zeta = \rho\, d\rho$$

Che se all'opposto si sostituiscano i valori di $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, e si raccolgano i respettivi coefficienti di dx, dy, dz, e si faccia per brevità

$$X_1 = X + Y \cos \varepsilon + Z \cos \varepsilon'$$
$$Y_1 = Y + X \cos \varepsilon + Z \cos \varepsilon''$$
$$Z_1 = Z + X \cos \varepsilon' + Y \cos \varepsilon''$$

troveremo per l'equazione trasformata

$$(X_1 - \xi)\, dx + (Y_1 - \eta)\, dy + (Z_1 - \zeta)\, dz = 0$$

Le nuove differenze

$$X_1 - \xi, \qquad Y_1 - \eta, \qquad Z_1 - \zeta$$

si riducono alle differenze

$$X - x, \qquad Y - y, \qquad Z - z$$

nell'ipotesi degli assi ortogonali.

186.° Fra l'indicato numero di normali alla curva in un punto dato, e tutte comprese nel piano normale ve ne ha una particolare che potremo chiamare *normale principale*, e verrà data dall'intersezione del piano osculatore con il piano normale: l'equazioni di questa retta si trovano nella coesistenza delle due per i medesimi valori di X, Y, Z

$$(X-x)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (Y-y)(dx\,d^2z - dz\,d^2x) + (Z-z)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0$$
$$(X-x)\, d\xi + (Y-y)\, d\eta + (Z-z)\, d\zeta = 0$$

dalle quali eliminando successivamente le tre differenze $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, si trova

$$\frac{X - x}{d\zeta(dz\, d^2x - dx\, d^2z) - d\eta\,(dx\, d^2y - dy\, d^2x)}$$

$$= \frac{Y - y}{d\xi(dx\, d^2y - dy\, d^2x) - d\zeta\,(dy\, d^2z - dz\, d^2y)}$$

$$= \frac{Z - z}{d\eta(dy\, d^2z - dz\, d^2y) - d\xi\,(dz\, d^2x - dx\, d^2z)}$$

Eseguendo le indicate moltiplicazioni, e riflettendo che per il differenziale dell'arco

$$ds^2 = dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta$$

si avrà da una nuova differenziazione

$$ds\, d^2s = dx\, d^2\xi + dy\, d^2\eta + dz\, d^2\zeta$$

mentre

$$dx\, d^2\xi + dy\, d^2\eta + dz\, d^2\zeta = d\xi\, d^2x + d\eta\, d^2y + d\zeta\, d^2z$$

Con queste sostituzioni, l'equazioni della normale principale dopo brevi riduzioni diverranno

$$\frac{X - x}{ds\, d^2x - dx\, d^2s} = \frac{Y - y}{ds\, d^2y - dy\, d^2s} = \frac{Z - z}{ds\, d^2z - dz\, d^2s}$$

le quali sussistono in qualunque sistema di coordinate rettilinee, e qualunque sia la scelta della variabile indipendente. Sieno ora a_1, b_1, c_1 i coefficienti del valor comune delle tre ultime frazioni per ottenere l'espressioni $X - x$, $Y - y$, $Z - z$; si avrà per la medesima equazione della normale principale

$$\frac{X - x}{a_1} = \frac{Y - y}{b_1} = \frac{Z - z}{c_1}$$

a_1, b_1, c_1 sono funzioni trigonometriche dell' inclinazione della normale principale con gli assi coordinati, e divengono i coseni degli angoli λ, μ, ν che la medesima normale forma con gli assi, quando questi sieno ortogonali, ed in qualunque ipotesi si trova

$$\frac{a_1}{ds\, d^2x - dx\, d^2s} = \frac{b_1}{ds\, d^2y - dy\, d^2s} = \frac{c_1}{ds\, d^2z - dz\, d^2s}$$

Queste equazioni si renderanno più semplici, se le variabili x, y, z si considerino funzioni dell'arco s preso come variabile indipendente, quindi preso ds costante, otterremo

$$\frac{a_1}{d^2x} = \frac{b_1}{d^2y} = \frac{c_1}{d^2z}$$

Ed in qualunque ipotesi si potrà scrivere

$$\frac{a_1}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{b_1}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{c_1}{d\frac{dz}{ds}}$$

D'altronde le frazioni

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

rappresentano le funzioni trigonometriche a, b, c, dell'inclinazioni della tangente con i tre assi, e perciò fra le sue funzioni a, b, c, a_1, b_1, c_1 avranno luogo l'equazioni

$$\frac{a_1}{da} = \frac{b_1}{db} = \frac{c_1}{dc}$$

Per ottenere un valore comune di queste tre frazioni basterà avvertire che le funzioni a_1, b_1, c_1 verificano

l'equazione

$$1=a_1^2+b_1^2+c_1^2+2a_1b_1\cos\varepsilon+2a_1c_1\cos\varepsilon'+2b_1c_1\cos\varepsilon''$$

cosicchè fatto per brevità

$$d\varsigma=\sqrt{da^2+db^2+dc^2+2dadb\cos\varepsilon+2dadc\cos\varepsilon'+2dbdc\cos\varepsilon''}$$

si otterrà

$$\frac{a_1}{da}=\frac{b_1}{db}=\frac{c_1}{dc}=\frac{1}{d\varsigma}$$

d'onde

$$a_1=\frac{da}{d\varsigma}\,,\quad b_1=\frac{db}{d\varsigma}\,,\quad c_1=\frac{dc}{d\varsigma}$$

Quando gli assi sieno ortogonali, allora chiamando λ, μ, ν gli angoli che la normale principale forma con i medesimi, si avrà

$$a_1=\cos\lambda\,,\qquad b_1=\cos\mu\,,\qquad c=\cos\nu$$

e per conseguenza

$$\frac{\cos\lambda}{ds\,d^2x-dx\,d^2s}=\frac{\cos\mu}{ds\,d^2y-dy\,d^2s}=\frac{\cos\nu}{ds\,d^2z-dz\,d^2s}$$

Osservando poi che

$$(dsd^2x-dxd^2s)^2+(dsd^2y-dyd^2s)^2+(dsd^2z-dzd^2s)^2$$

$$=ds^2\left((d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2\right)$$

si otterranno immediatamente i valori

$$\cos\lambda = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}$$

$$\cos\mu = \frac{ds\, d^2y - dy\, d^2s}{ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}$$

$$\cos\nu = \frac{ds\, d^2z - dz\, d^2s}{ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}$$

Queste formole sono incluse come caso particolari negli antecedenti valori di a_1, b_1, c_1.

187.° Per il punto di contatto (x, y, z) si conduca una retta perpendicolare al piano osculatore sarà perpendicolare insieme alla tangente ed alla normale principale; ed in altri termini se di questa retta sia l'equazione

$$\frac{X'-x}{a'} = \frac{Y'-y}{b'} = \frac{Z'-z}{c'}$$

dovrà esser perpendicolare alle due

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}$$

$$\frac{X-x}{a_1} = \frac{Y-y}{b_1} = \frac{Z-z}{c_1}$$

Ora la condizione perchè la prima retta sia perpendicolare a queste due risiede nella verificazione delle due equazioni

$$aa' + bb' + cc' + (ab' + a'b)\cos\varepsilon$$
$$+ (ca' + ac')\cos\varepsilon' + (bc' + cb')\cos\varepsilon'' = 0$$

$$a'a_1 + b'b_1 + c'c_1 + (a'b_1 + a_1b')\cos\varepsilon$$
$$+ (c'a_1 + a'c_1)\cos\varepsilon' + (b'c_1 + c'b_1)\cos\varepsilon'' = 0$$

nelle quali il primo membro rappresentando il coseno dell'angolo di due rette, sarà questo nullo se sia retto. Raccogliendo i coefficienti di a, b, c, e chiamando L, M, N gli angoli che questa retta perpendicolare al piano osculatore nel punto forma con i tre assi coordinati x, y, z, si ricaverà per quanto è stato di già stabilito al paragrafo 182

$$\cos L = a' + b'\cos\varepsilon + c'\cos\varepsilon'$$

$$\cos M = b' + a'\cos\varepsilon + c'\cos\varepsilon''$$

$$\cos N = c' + a'\cos\varepsilon' + b'\cos\varepsilon''$$

qnindi le precedenti equazioni si trasformeranno in

$$a\cos L + b\cos M + c\cos N = o$$

$$a_1\cos L + b_1\cos M + c_1\cos N = o$$

Le funzioni trigonometriche a, b, c sono proporzionali respettivamente ai differenziali dx, dy, dz, come d' altronde a_1, b_1, c_1 sono proporzionali a, $dsd^2x - d\,sd^2s, \ldots$ dunque per la determinazione degli angoli L, M, N avremo le due equazioni

$$\cos L\,dx + \cos M\,dy + \cos N\,dz = o$$

$$\cos L\,d^2x + \cos M\,d^2y + \cos N\,d^2z = o$$

dalle quali per l'eliminazione

$$\frac{\cos L}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{\cos M}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{\cos N}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

Ognun vede che i coefficienti cos L , cos M , cos N determinati da queste formole non differiscono dai coefficienti del piano osculatore, od in altri termini il piano

rappresentato dall'equazione

$$(X-x)\cos L+(Y-y)\cos M+(Z-z)\cos N=o$$

coincide con il piano osculatore della curva. Quando gli assi sieno ortogonali, fra i coseni degli angoli L, M, N, si ha la relazione

$$\cos^2 L+\cos^2 M+\cos^2 N=1$$

ma nel caso opposto avrà luogo un'altra condizione che mi si rende qui inutile di richiamare: quindi per gli assi ortogonali il valor comune delle tre frazioni simmetriche sarà evidentemente

$$\frac{\cos L}{dy\, d^2z-dz\, d^2y}=\frac{\cos M}{dz\, d^2x-dx\, d^2z}=\frac{\cos N}{dx\, d^2y-dy\, d^2x}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}}$$

$$=\pm\frac{1}{ds\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}$$

dalle quali si ottiene

$$\cos L=\pm\frac{dy\, d^2z-dz\, d^2y}{ds\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}$$

$$\cos M=\pm\frac{dz\, d^2x-dx\, d^2z}{ds\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}$$

$$\cos N=\pm\frac{dx\, d^2y-dy\, d^2x}{ds\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}$$

Queste formole si renderanno più semplici per la supposizione di ds costante o di $d^2s=o$. Scegliendo una

delle coordinate per esempio la x, per variabile indipendente in modo da fare

$$dy = y'dx\,, \quad d^2y = y''dx^2\,, \quad dz = z'dx\,, \quad d^2z = z''dx^2$$

allora per gli angoli L, M, N, si ha

$$\frac{\cos L}{y'z'' - z'y''} = \frac{\cos M}{-z''} = \frac{\cos N}{y''}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{y''^2 + z''^2 + (y'z'' - z'y'')^2}}$$

Sarà bene qui di osservare che cos L, cos M, cos N rappresenteranno ancora i coseni degli angoli che il piano osculatore della curva forma con i tre piani ortogonali yz, xz, xy; contuttociò in qualunque sistema di coordinate rettilinee l'equazione del piano osculatore sarà

$$(y'z'' - z'y'')(X - x) - z''(Y - y) + y''(Z - z) = 0$$

Da tutto l'esposto sopra le curve tracciate nello spazio, ne segue che l'equazioni della tangente, del piano osculatore, e della normale principale rimangono invariabili di forma facendo uso delle coordinate od ortogonali, od oblique.

188.° Immaginando la curva situata nello spazio proveniente dall' intersezione di due superficie curve di equazioni

$$u = 0\,, \qquad v = 0$$

avremo dalla differenziazione

$$D_x u\, dx + D_y u\, dy + D_z u\, dz = 0$$

$$D_x v\, dx + D_y v\, dy + D_z v\, dz = 0$$

nelle quali fatto per brevità

$$P = D_y u\, D_z v - D_y v\, D_z u$$
$$Q = D_z u\, D_x v - D_z v\, D_x u$$
$$R = D_x u\, D_y v - D_x v\, D_y u$$

si ricava dall'eliminazione

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

Se le nuove funzioni P, Q, R, si derivino respettivamente rapporto ad x, ad y, e a z, daranno luogo all' equazione comune

$$D_x P + D_y Q + D_z R = o$$

Nella nota equazione della retta tangente i differenziali dx, dy, dz sono proporzionali alle consuete funzioni trigonometriche a, b, c, e perciò otterremo ancora

$$\frac{a}{P} = \frac{b}{Q} = \frac{c}{R}$$

Il comun valore di queste frazioni si ha per conosciuta relazione

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \varepsilon + 2ac \cos \varepsilon' + 2bc \cos \varepsilon''$$

per cui facendo per semplicità

$$S^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ \cos \varepsilon + 2PR \cos \varepsilon' + 2QR \cos \varepsilon''$$

si trova

$$\frac{a}{P} = \frac{b}{Q} = \frac{c}{R} = \pm \frac{1}{S}$$

d'onde

$$a = \pm \frac{P}{S}, \quad b = \pm \frac{Q}{S}, \quad c = \pm \frac{R}{S}$$

Nella stessa guisa osservando che i differenziali dx, dy, dz sono egualmente proporzionali alle differenze $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, avremo dall'equazioni differenziali delle due superficie curve

$$(X - x) D_x u + (Y - y) D_y u + (Z - z) D_z u = o$$

$$(X - x) D_x v + (Y - y) D_y v + (Z - z) D_z v = o$$

Di qui ne viene che per ottenere l'equazione della retta tangente una curva tracciata nello spazio, basterà nella sua equazione differenziali sostituire le differenze $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, ai differenziali dx, dy, dz. Volendo che u si riduca ad una funzione di due sole variabili x, y, allora $u = o$ sarà la projezione della curva sul piano delle x, y; come la nuova equazione

$$(X - x) D_x u + (Y - y) D_y u$$

rappresenta la tangente della projezione, ed insieme la projezione della tangente: questa sola osservazione ci fa immediatamente concludere che la projezione della tangente ad una curva qualunque sopra un piano dato si confonde sempre con la tangente della curva projettata sul medesimo piano, come si era osservato al parag. 183.

189.° Per mostrare una qualche applicazione consideriamo l'ellissi proveniente dall' intersezione del cilindro circolare di equazione

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\varepsilon = r^2$$

e del piano

$$Ax + By + Cz = K$$

L'equazioni differenziali di questa curva saranno

$$(x + y \cos\varepsilon) dx + (y + x \cos\varepsilon) dy = o$$

$$A\, dx + B\, dy + C\, dz = o$$

Di qui per un'osservazione fatta nell'antecedente parag. l'equazioni della tangente saranno

$$(x + y\cos\varepsilon)(X - x) + (y + x\cos\varepsilon)(Y - y) = 0$$

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

e che si riducono ad

$$Xx + Yy + (Xy + Yx)\cos\varepsilon = r^2$$

$$AX + BY + CZ = K$$

Queste due equazioni rappresentano la tangente al circolo base del cilindro nel piano delle x, y, ed il piano stesso della curva; come d'altronde è evidente. Di più i differenziali dx, dy, dz essendo proporzionali alle funzioni trigonometriche a, b, c le quali determinano la direzione della tangente, si avrà ancora

$$(x + y\cos\varepsilon)\,a + (y + x\cos\varepsilon)\,b = 0$$

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

dalle quali

$$\frac{a}{y + x\cos\varepsilon} = \frac{b}{-(x + y\cos\varepsilon)} = \frac{c}{\frac{B}{C}(x + y\cos\varepsilon) - \frac{A}{C}(y + x\cos\varepsilon)}$$

Nel caso degli assi ortogonali le precedenti formole daranno per l'inclinazione della retta tangente

$$\frac{\cos\alpha}{y} = \frac{\cos\beta}{-x} = \frac{\cos\gamma}{\frac{Bx - Ay}{C}}$$

quindi il valor comune

$$\frac{\cos\alpha}{y} = \frac{\cos\beta}{-x} = \frac{\cos\gamma}{\frac{Bx - Ay}{C}} = \pm\frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{Bx - Ay}{C}\right)^2}}$$

Sotto questa condizione si avrà pure per i differenziali dx, dy, dz

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{\frac{Bx-Ay}{C}}$$

e perciò l'equazione del piano normale diverrà

$$C(Xy-xY)+(Z-z)(Bx-Ay)=0$$

Ripresa l' ipotesi degli assi obliqui si prosegua la differenziazione, e derivazione col supporre dx costante, si avrà

$$x+y\cos\varepsilon+(y+x\cos\varepsilon)\,y'=0$$

$$1+y'\cos\varepsilon+(y+x\cos\varepsilon)\,y''+(y'+\cos\varepsilon)\,y'=0$$

$$A+By'+Cz'=0$$

$$By''+Cz''=0$$

d'onde troveremo per le derivate

$$y'=-\frac{(x+y\cos\varepsilon)}{y+x\cos\varepsilon},\quad z'=\frac{B(x+y\cos\varepsilon)-A(y+x\cos\varepsilon)}{C\,(y+x\cos\varepsilon)}$$

$$y''=-\frac{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\varepsilon}{(y+x\cos\varepsilon)^3},\quad z''=\frac{B}{C}\,\frac{r^2\mathrm{sen}^2\varepsilon}{(y+x\cos\varepsilon)^3}$$

Se questi valori si sostituiscano nell' ultima equazione del parag. 187 dopo tutte le riduzioni si trova per l'equazione del piano osculatore

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)$$

il quale coincide con il piano della curva, come d'altronde dovea essere.

190.° Consideriamo per un'altro esempio, un'*Elica*

descritta sulla superficie di un'cilindro retto a base circolare in modo da formare sempre un angolo costante con la generatrice del cilindro: quando l'asse del cilindro, che noi potremo anche chiamare *asse dell'elica* si confonda con l'asse delle z, allora la base del cilindro, che sarà un circolo di un determinato raggio R, descritto nel piano delle $x\ y$ avrà per equazione

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Chiamando adesso p un angolo variabile che il raggio R forma con l'asse delle x, è evidente che per costruire un Elica basterà portare nel senso della generatrice del cilindro, che coinciderà con l' asse delle z, una lunghezza proporzionale all'arco Rp, in modo che la terza coordinata z sia in un rapporto costante con lo stesso arco, in questo modo l'equazioni dell'Elica saranno comprese nelle formole

$$x = R\cos p, \quad y = R \operatorname{sen} p, \quad z = aRp$$

a rappresenta una data costante, la quale si potrà determinare da un valore particolare di p, che sarà positivo, o negativo secondo che il raggio R avrà un movimento diretto, o retrogrado con l' asse delle ascisse: supponendo adunque, che la z si trasformi nella lunghezza costante h quando sia $p = 360 = 2\pi$; sotto questa condizione sarà

$$h = 2\pi aR, \qquad \text{ovvero} \qquad a = \frac{h}{2\pi R}$$

Per conoscere le projezioni dell'elica nei piani $x\,z$, $y\,z$, basterà eliminare l'angolo p nei due valori x, y, vale a dire

$$x = R\cos\left(\frac{z}{aR}\right), \quad y = R \operatorname{sen}\left(\frac{z}{aR}\right)$$

ovvero

$$x = \mathrm{R} \cos \left(\frac{2 \pi z}{h}\right) \qquad y = \mathrm{R} \operatorname{sen} \left(\frac{2 \pi z}{h}\right)$$

Le curve rappresentate dalle precedenti due equazioni sono incluse nelle curve che si chiamano dei seni, e coseni; l'altezza h corrispondente all' intera periferia è ciò che dicesi *passo* dell'*elica*; infine osservando che dai tre valori delle x, y, z si ricava

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} p\,, \quad p = \frac{z}{a\mathrm{R}} = \frac{2 \pi z}{h}$$

avremo

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\left(\frac{z}{a\mathrm{R}}\right), \quad \text{ossia} \quad z = a\mathrm{R} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ovvero

$$z = \frac{h}{2\pi} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Questa equazione appartiene alla superficie *Elicoide* generata dal moto orizzontale del raggio R che trovasi fisso con le due estremità sull'asse del cilindro, e sull' elica: viceversa immaginando che la superficie Elicoide rappresentata dalla precedente equazione venga ad incontrare un cilindro di equazione

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$$

allora l'intersezione di queste due superficie produrrà due eliche delle quali i punti corrispondenti sono situati ad egual distanza dall' asse delle z; quindi la coesistenza delle due ultime equazioni rappresenta due curve eliche, una delle quali si confonde con quella che abbiamo fino ad ora considerato.

191.° Differenziando i valori delle tre coordinate x, y, z espresse per l'angolo p, si avrà

$$dx = -R \operatorname{sen} p\, dp\,, \quad dy = R \cos p\, dp\,, \quad dz = aR\, dp$$

ed il differenziale dell'arco s, darà con gran facilità

$$ds = R\, dp \sqrt{1 + a^2}$$

e per conseguenza gli angoli α, β, γ, che la tangente ad un punto (x, y, z) dell'elica forma con gli assi delle coordinate, saranno espressi per le formole di già trovate al parag. 183, con

$$\frac{\cos\alpha}{-R \operatorname{sen} p} = \frac{\cos\beta}{R \cos p} = \frac{\cos\gamma}{aR} = \pm\frac{1}{R\sqrt{1 + a^2}}$$

ossia

$$\cos\alpha = \mp\frac{\operatorname{sen} p}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{\cos p}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$$

l'angolo γ che la curva forma con l'asse delle z si mantiene costantemente lo stesso come deve essere, quante volte l'asse delle z coincida con la generatrice del cilindro : nello stesso modo l'equazione del piano normale come si è trovato al parag. 185 diverrà nel nostro caso

$$\frac{1}{a}\Big((Y - y) \cos p - (X - x) \operatorname{sen} p\Big) + Z - z = 0$$

Supposto ora ds costante, e proseguendo la differenziazione, abbiamo primieramente

$$d^2s = Rd^2p \sqrt{1 + a^2} = 0\,, \qquad \text{cioè} \qquad d^2p = 0$$

Sotto quest' ipotesi, una nuova differenziazione delle x, y, z darà

$$d^2x = -R \cos p\, dp^2\,, \quad d^2y = -R \operatorname{sen} p\, dp^2\,, \quad d^2z = 0$$

Di qui i coseni degli angoli λ, μ, ν che la normale principale alla curva nel punto (x, y, z) contiene con i tre assi, per le formole stabilite al parag. 186 daranno

$$\frac{\cos\lambda}{-\cos p} = \frac{\cos\mu}{-\operatorname{sen} p} = \frac{\cos\nu}{0} = \pm 1$$

quindi

$$\cos\lambda = \pm\cos p\,, \quad \cos\mu = \pm\operatorname{sen} p\,, \quad \cos\nu = 0$$

dalle quali si deduce che l'angolo formato dalla normale principale con la generatrice del cilindro è retto, od in altri termini la normale principale è parallela alla base del cilindro, e si confonderà con la generatrice della superficie Elicoide. Infine come già si è veduto al paragrafo 187 i coseni degli angoli L, M, N formati da una perpendicolare al piano osculatore con i tre assi coordinati, dipenderanno per la elica dalle formole

$$\frac{\cos L}{a\operatorname{sen} p} = \frac{\cos M}{-a\cos p} = \cos N$$

ovvero per il loro valor comune

$$\frac{\cos L}{\operatorname{sen} p} = \frac{\cos M}{-\cos p} = \frac{\cos N}{\frac{1}{a}} = \pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

e siccome si ha

$$\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\,, \qquad \operatorname{tang}\gamma = \frac{1}{a}$$

così anche

$$\frac{\cos L}{\operatorname{sen} p} = \frac{\cos M}{-\cos p} = \frac{\cos N}{\operatorname{tang}\gamma} = \pm\cos\gamma$$

e quindi

$$\cos L = \pm \operatorname{sen} p \cos \gamma,\ \cos M = \mp \cos p \cos \gamma,\ \cos N = \pm \operatorname{sen} \gamma$$

Ognun vede che gli angoli p, γ sono le coordinate polari di un punto di questa retta innalzata perpendicolarmente al piano osculatore ; di più i coefficienti del piano osculatore sono proporzionali ai coseni degli angoli L, M, N, e perciò la sua equazione sarà evidentemente

$$(X - x) \operatorname{sen} p - (Y - y) \cos p + (Z - z) \operatorname{tang} \gamma = 0$$

ovvero

$$a \Big((X - x) \operatorname{sen} p - (Y - y) \cos p \Big) + Z - z = 0$$

Molte altre formole relative all'elica si troveranno, quando parleremo in particolare dei raggi di curvatura di una linea situata nello spazio, e vedremo delle proprietà rimarcabili delle quali gode questa curva.

Dei piani tangenti, e delle normali alle superficie curve.

192.° Riferendo i diversi punti di una superficie curva a tre assi o rettangolari od obliqui, sieno secondo il consueto x, y, z le tre coordinate di un punto qualunque, e rappresentiamo per

$$u = 0$$

la sua equazione, nella quale u sarà una funzione data delle tre variabili x, y, z, e differenziandola avremo

$$D_x u\, dx + D_y u\, dy + D_z u\, dz = 0$$

In ambedue l'equazioni, finita l'una, e differenziale l'altra si potrà considerare una qualunque z funzione delle due indipendenti x, y. Immaginiamo adesso che per un punto dato (x, y, z) si faccia passare una curva tracciata nella medesima superficie; in questo caso una sola delle tre coordinate x, y, z rimarrà indipendente in modo che la projezione di questa curva nel piano x, y potrà avere per equazione finita

$$f(x, y) = o$$

e per equazione differenziale

$$f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy = o$$

ed eliminando il dy con l' equazione differenziale della superficie, si otterrà per la projezione della curva nel piano $x\, z$

$$\left(\frac{f'_y(x, y)\, D_x u - f'_x(x, y)\, D_y u}{f'_y(x, y)}\right) dx + D_z u\, dz = o$$

Ciò posto per il punto (x, y, z) conduciamo una retta tangente alla curva tracciata sulla superficie, e sieno X, Y, Z le coordinate di un punto qualunque della medesima, si ricaverà per le sue equazioni

$$f'_x(x, y)\,(X - x) + f'_y(x, y)\,(Y - y) = o$$

$$\left(\frac{f'_y(x, y)\, D_x u - f'_x(x, y)\, D_y u}{f'_y(x, y)}\right)(X - x) + D_z u (Z - z) = o$$

Eliminando fra queste due, le funzioni $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, l'equazione risultante sarà il luogo geometrico di tutte le tangenti condotte per il punto (x, y, z) a curve qualunque delineate sulla superficie curva. Questa eliminazione ci conduce all' equazione di primo grado fra le

variabili X, Y, Z, cioè

$$(X-x)\,D_x u + (Y-y)\,D_y u + (Z-z)\,D_z u = 0$$

la quale apparterrà evidentemente ad un piano, che si chiamerà *piano tangente* della superficie in un punto dato $(x\,,\,y\,,\,z)$. Tal' è il luogo geometrico di tutte le tangenti alle curve tracciate sulle superficie, e che passano per il punto di contatto. Dall' equazione differenziale della superficie si passerà a quella del piano tangente col sostituire le differenze $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ in vece dei differenziali dx, dy, dz. Il piano tangente avrà comune un sol punto $(x\,,y\,,z)$ colle superficie convesse in tutte le loro parti; ma in generale si potrà dire che il piano tangente taglierà la superficie secondo una linea, la quale passerà per il punto di contatto, e non cesserà di contenere tutte le tangenti alle curve tracciate in questo punto sulla superficie. Questa linea di intersezione separerà tutte le linee le quali trovansi descritte sulla superficie al di sopra, e al di sotto del piano tangente: aggiungiamo di più che tutte le precedenti considerazioni suppongono che i punti, pei quali passino tutte le rette tangenti non sieno punti singolari; mentre allora il luogo geometrico delle medesime sarà in generale una superficie differente dal piano.

193.° Una retta la quale si elevi perpendicolarmente dal punto di contatto al piano tangente, è ciò che dicesi *normale* alla superficie per il punto dato. Se rappresentiamo per

$$\frac{X-x}{a_1}=\frac{Y-y}{b_1}=\frac{Z-z}{c_1}$$

le sue equazioni, la condizione onde questa retta sia perpendicolare al piano tangente sarà come nel parag. 185

espressa da

$$\frac{D_x u}{a_1 + b_1 \cos \varepsilon + c_1 \cos \varepsilon'} = \frac{D_y u}{b_1 + a_1 \cos \varepsilon + c_1 \cos \varepsilon''}$$

$$= \frac{D_z u}{c_1 + a_1 \cos \varepsilon' + b_1 \cos \varepsilon''}$$

Da queste equazioni devono ricavarsi i valori delle funzioni trigonometriche a_1, b_1, c_1, le quali porgeranno le inclinazioni della normale alla superficie con i tre assi coordinati. Quando le coordinate fossero ortogonali, allora a_1, b_1, c_1 si ridurranno ai coseni degli angoli λ, μ, ν che la normale forma con gli assi delle x e delle y, delle z, e si avrebbe facilmente per il valor comune

$$\frac{D_x u}{\cos \lambda} = \frac{D_y u}{\cos \mu} = \frac{D_z u}{\cos \nu} = \pm \sqrt{(D_x u)^2 + (D_y u)^2 + (D_z u)^2}$$

e facendo per brevità

$$R = \sqrt{(D_x u)^2 + (D_y u)^2 + (D_z u)^2}$$

si trova

$$\cos \lambda = \pm \frac{D_x u}{R}, \quad \cos \mu = \pm \frac{D_y u}{R}, \quad \cos \nu \pm = \frac{D_z u}{R}$$

Il segno $+$, o $-$ si adoprerà secondo che la normale sarà prolungato in un senso, od in un altro a partir dal punto (x, y, z), e perciò l'equazioni della normale nell' ipotesi degli assi ortogonali saranno comprese nelle formole

$$\frac{X - x}{D_x u} = \frac{Y - y}{D_y u} = \frac{Z - z}{D_z u}$$

In qualunque sistema di assi i denominatori delle derivate parziali $D_x u$, $D_y u$, $D_z u$, saranno i coseni degli angoli λ, μ, ν che la normale forma con i tre assi obliqui in modo che chiamando R il valor comune delle tre frazioni in proposito, si avranno per la determinazione delle funzioni trigonometriche a_1, b_1, c_1 le equazioni

$$a_1 + b_1 \cos \varepsilon + c_1 \cos \varepsilon' = \frac{D_x u}{R}$$

$$b_1 + a_1 \cos \varepsilon + c_1 \cos \varepsilon'' = \frac{D_y u}{R}$$

$$c_1 + a_1 \cos \varepsilon' + b_1 \cos \varepsilon'' = \frac{D_z u}{R}$$

Il valor comune R sarà indipendente dalle a_1, b_1, c_1 e conterrà solamente le derivate parziali della u, e le funzioni trigonometriche degli angoli degli assi, e dei piani. Eseguendo l' eliminazione otterremo i valori di a_1, b_1, c_1 dai quali si conosceranno l' equazioni della retta normale.

194.° Le precedenti equazioni del piano tangente, e della normale possono prendere differenti altre forme dipendenti dalla particolar forma dell' equazione della superficie. Così se $u = 0$ dia

$$f(x, y) - z = 0$$

allora è evidente che

$$D_x u = f_x'(x, y)\,, \quad D_y u = f_y'(x, y)\,, \quad D_z u = -1$$

quindi ponendo

$$p = f_x'(x, y) = D_x z\,, \quad q = f_y'(x, y) = D_y z$$

sarà non solo

$$dz = p dx + q dy$$

ma ben anche per l'equazione del piano tangente

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

e per l'inclinazione della normale nell'ipotesi degli assi ortogonali avremo

$$\frac{p}{\cos\lambda} = \frac{q}{\cos\mu} = \frac{-1}{\cos\nu} = \pm\sqrt{1+p^2+q^2}$$

d'onde

$$\cos\lambda = \pm\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad \cos\mu = \pm\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\cos\nu = \mp\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

e per conseguenza l' equazioni della normale sono comprese nelle formole

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

ovvero

$$X - x + p(Z - z) = 0\ ,\quad Y - y + q(Z - z) = 0$$

l'angolo ν formato dalla normale con l'asse delle z sarà eguale all'angolo formato dal piano tangente con il piano xy, ed il suo valore sarà dato dalla formola

$$\cos\nu = \pm\frac{D_z u}{R}\ ,\quad \text{ovvero}\quad \cos\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

L'angolo ν si suol chiamare l'*inclinazione* del *piano tangente*, ovvero l'*inclinazione* della *superficie* in questo punto. Infine supponiamo che denotando u, v, w .... funzioni

date delle variabili x, y, z l'equazione della superficie sia

$$u+v+w+\ldots\ldots=c$$

avremo per l'equazione del piano tangente

$$(D_x u+D_x v+D_x w+\ldots)X+(D_y u+D_y v+D_y w+\ldots)Y$$

$$+(D_z u+D_z v+D_z w+\ldots)Z=x\,D_x u+y\,D_y u+z\,D_z u+\ldots$$

$$+xD_x v+yD_y v+zD_z v+\ldots+x\,D_x w+y\,D_y w+zD_z w+\ldots$$

Quando u, v, w ... fossero funzioni omogenee del grado m, $m-1$, $m-2$ . . . allora dal teorema sulle funzioni omogenee, si ricaverà per il piano tangente la superficie del grado m

$$(D_x u+D_x v+D_x w+\ldots)X+(D_y u+D_y v+D_y w+\ldots)Y$$

$$+(D_z u+D_z v+D_z w\ldots)Z=mu+(m-1)\,v+(m-2)w\ \ldots$$

la quale in forza dell'equazione della superficie diverrà

$$(D_x u+D_x v+D_x w+\ldots)X+(D_y u+D_y v+D_y w+\ldots)Y$$

$$+(D_z u+D_z v+D_z w+\ldots)Z=mc-v-2w\ \ldots.$$

Se volessimo considerare variabili le x, y, z in quest' ultima formola, allora in vece di rappresentare il piano tangente, rappresenterà l'equazione di un'altra superficie del grado $m-1$., la quale racchiude il punto di contatto della prima con il piano tangente condotto per il punto (X, Y, Z).

195.° Prima di venire a speciali applicazioni analizziamo brevemente la posizione del piano tangente nei punti di quelle superficie le quali vengono generate dal moto di una retta, e si sogliono chiamare *superficie rigate* ; tali sono le superficie coniche, cilindriche, e l'iper-

boloide da una falda; contuttociò le superficie rigate si dividono in *superficie gobbe*, e *superficie sviluppabili*; nelle superficie gobbe due posizioni consecutive della generatrice rettilinea non si trovano nel medesimo piano; in questo caso i piani tangenti ai diversi punti della medesima generatrice rettilinea passano tutti per questa retta, ma sono distinti gli uni dagli altri, e ciascuno toccherà la superficie in un sol punto: all'opposto nelle superficie sviluppabili, nelle quali due posizioni consecutive della retta generatrice sono in un medesimo piano la superficie in questione verrà toccata dal piano tangente lungo ciascuna generatrice: di più l'intersezione consecutiva di due generatrici situate in uno stesso piano formerà una curva alla quale è tangente ciascuna generatrice, questa si chiamerà *curva di regresso* della superficie sviluppabile. Così nelle superficie cilindriche, la linea di regresso è interamente all' infinito come nelle superficie coniche si ridurrà al solo vertice: aggiungiamo ancora che il vertice della superficie conica è un punto per il quale può passare un numero infinito di piani tangenti, ed offre delle particolarità simili a quelle che presentano i punti singolari delle curve piane; in questo caso i coseni degli angoli che la normale alla superficie forma con i tre assi diverranno indeterminati, e l'equazione del piano tangente diverrà od identica, od eguale ad una costante arbitraria. Veniamo ora ad esporre successivamente alcune applicazioni.

196.° Consideriamo primieramente una superficie del second'ordine rappresentata dall'equazione generale

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz = K$$

Trasponendo la costante K nel primo membro, e facendo

$$u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz - K$$

l'equazione della superficie si ridurrà ad

$$u = 0$$

Supponendo che il punto di contatto del piano tangente colla superficie sia (x, y, z), e che X, Y, Z rappresentino le coordinate di un punto qualunque del piano, avremo dalle derivazioni parziali

$$D_x u = 2\,(Ax + Ez + Fy + G)$$

$$D_y u = 2\,(By + Dz + Fx + H)$$

$$D_z u = 2\,(Cz + Dy + Ex + I)$$

quali valori sostituiti nell'equazione generale del piano tangente, ottenuta al parag. 192 e dividendo per 2, verrà

$$(X-x)(Ax+Ez+Fy+G)+(Y-y)(By+Dz+Fx+H)$$
$$+(Z-z)(Cz+Dy+Ex+I)=0$$

Eseguendo le indicate moltiplicazioni, e riflettendo alla equazione della superficie, avremo con facilità

$$AXx+BYy+CZz+2D\left(\frac{Yz+Zy}{2}\right)$$

$$+2E\left(\frac{Xz+Zx}{2}\right)+2F\left(\frac{Xy+Yx}{2}\right)+2G\left(\frac{X+x}{2}\right)$$

$$+2H\left(\frac{Y+y}{2}\right)+2I\left(\frac{Z+z}{2}\right)=K$$

Quest'espressione ci dice che per passare dall'equazione delle superficie del second'ordine all'equazione del loro piano tangente basterà ai quadrati x^2, y^2, z^2 sostituire i rettangoli Xx, Yy, Zz, ed ai prodotti yz . . . . la

la semisomma dei prodotti $\frac{Yz + Zy}{2}$ ... come alle x ,... la semisomma delle $X + x$, . . . Se ora da un punto dato (X, Y, Z) fuori della superficie del second'ordine si voglia condurre un piano tangente alla medesima superficie, basterà per la risoluzione della questione combinare l'ultima trovata equazione del piano tangente con l'equazione $u = o$ della superficie; in questo modo facendo per brevità

$$x - \frac{X}{2} = \xi, \quad y - \frac{Y}{2} = \eta, \quad z - \frac{Z}{2} = \zeta$$

ed insieme

$$K_1 = \left\{ \frac{AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EXZ + 2FXY + 2GX + 2HY + 2IZ}{4} \right\}$$

si ricaverà l'equazione

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\eta\zeta + 2E\xi\zeta + 2F\xi\eta + 2G\xi + 2H\eta + 2I\zeta = K_1$$

la quale appartiene ad una nuova superficie del secondo ordine, e determinerà i punti di contatto con la prima dalla loro mutua intersezione, e per conseguenza da un punto dato si potranno condurre differenti piani tangenti ad una superficie del second'ordine: osserviamo inoltre che l'equazione del piano tangente essendo di forma lineare sia riguardo alle X, Y, Z sia alle x, y, z, ne verrà che supposte costanti le X, Y, Z, e variabili le x, y, z seguiterà l'equazion suddetta a rappresentare un piano, il quale conterrà tutti i punti di contatto; dunque se da un punto fisso (X , Y , Z) si conducano dei

piani tangenti a differenti punti di una superficie del secondo ordine, la curva di contatto sarà situata in un sol piano: questa proprietà delle superficie del secondo ordine si potea dedurre ancora da un osservazione, che abbiamo fatto alla fine del parag. 194.

197.° Facciamo adesso nell'equazione delle superficie del second'ordine

$$v = \frac{1}{2} u$$

e si chiami V ciò che diviene la v per la sostituzione delle X, Y, Z invece delle x, y, z, l'equazione del piano tangente ordinata rispetto alle X, Y, Z darà

$$\mathrm{X}\mathrm{D}_x v + \mathrm{Y}\mathrm{D}_y v + \mathrm{Z}\mathrm{D}_z v = \mathrm{K} - (\mathrm{G}x + \mathrm{H}y + \mathrm{I}z)$$

ed ordinata rapporto alle x, y, z, diverrà

$$x\,\mathrm{D}x\mathrm{V} + y\,\mathrm{D}\mathrm{Y}\mathrm{V} + z\,\mathrm{D}z\mathrm{V} = \mathrm{K} - (\mathrm{GX} + \mathrm{HY} + \mathrm{IZ})$$

Come già abbiamo avvertito, se in questa ultima formola prendiamo le x, y, z variabili, e le X, Y, Z costanti, allora l'equazione rappresenterà il piano della curva di contatto della superficie con la superficie di un cono circoscritto, del quale il vertice coincide con il punto (X, Y, Z); questo piano dicesi *piano polare* della superficie corrispondente al *polo* (X, Y, Z); conduciamo dall'origine delle coordinate una retta ρ al polo (X,Y,Z), e facciamo

$$\mathrm{X} = \alpha\rho, \quad \mathrm{Y} = \beta\rho, \quad \mathrm{Z} = \gamma\rho$$

l'equazione del piano tangente diverrà

$$\alpha\,\mathrm{D}_x v + \beta\,\mathrm{D}_y v + \gamma\,\mathrm{D}_z v = \frac{\mathrm{K} - (\mathrm{G}x + \mathrm{H}y + \mathrm{I}z)}{\rho}$$

Se in questa formola si supponga $\rho = \pm \infty$, il polo

(X, Y, Z) sarà situato ad una distanza infinita dall'origine, ed il cono circoscritto si trasformerà in un cilindro circoscritto, del quale la curva di contatto sarà un piano di equazione

$$\alpha D_x v + \beta D_y v + \gamma D_z v = o$$

e la generatrice sarà parallela alla retta di equazione,

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma}$$

Diverse proprietà interessanti dei piani delle curve di contatto verranno enumerate, quando parleremo dei coni, e cilindri circoscritti alle superficie; ed in particolare a quelle del second'ordine; ci basterà per ora notare che se la generatrice del cilindro circoscritto diviene successivamente parallela ai tre assi coordinati delle x, y, z, i tre piani delle curve di contatto avranno respettivamente per equazioni

$$D_x v = o \;, \quad D_y v = o \;, \quad D_z v = o$$

La coesistenza di questi tre piani diametrali determinerà ancora il centro della superficie ; quando di questo ne sia dotato. Per l'equazioni poi della retta normale avremo come dal parag. 193

$$\frac{X - x}{Ax + Ez + Fy + G} = \frac{Y - y}{By + Dz + Fx + H} = \frac{Z - z}{Cz + Dy + Ex + I}$$

ed insieme per i coseni degli angoli che la medesima forma con i tre assi coordinati sarà

$$\frac{\cos \lambda}{Ax + Ez + Fy + G} = \frac{\cos \mu}{By + Dz + Fx + H} = \frac{\cos \nu}{Cz + Dy + Ex + I}$$

ove per gli assi ortogonali si verifica

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$$

e sarà facile di poterne determinare gli effettivi valori per ciascuna superficie in particolare di quelle del second'ordine : è importante poi di osservare che le trovate equazioni della retta normale sussistono soltanto nel caso degli assi ortogonali.

198.° Riducendosi la snperficie del secondo ordine ad un ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

avremo per l'equazione del piano tangente nel punto (x, y, z) della superficie, ed in qualunque sistema di assi obliqui, e diametrali

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1$$

Snpponendo dato il punto (X, Y, Z) fuori della superficie del quale si voglia condurre un piano tangente, basterà per risolvere la questione, combinare l'eqnazioni della snperficie, e del piano, quindi fatto per brevità

$$x-\frac{X}{2}=\xi,\quad y-\frac{Y}{2}=\eta,\quad z-\frac{Z}{2}=\zeta$$

ed insieme

$$\alpha=\frac{a}{2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta=\frac{b}{2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma=\frac{c}{2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

risulterà

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=1$$

la quale appartiene ad una nuova ellissoide di semiassi α, β, γ, e l'intersezione di questa con la data determinerà i diversi punti di contatto; l'equazioni della normale nel caso degli assi ortogonali diverranno

$$\frac{a^2(X-x)}{x}=\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{c^2(Z-z)}{z}$$

ciascuna delle tre equazioni appartiene alla projezione della normale nei tre piani ortogonali, e principali, e coincideranno con le rette normali delle tre sezioni principali ai corrispondenti punti (x, y, z); se fra i semiassi sia $a > b > c$, noi potremo avere le tre equazioni separate

$$\frac{X}{x\left(\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right)^2}-\frac{Y}{y\left(\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{b}\right)^2}=1$$

$$\frac{X}{x\left(\frac{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right)^2}-\frac{Z}{z\left(\frac{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)^2}=1$$

$$\frac{Y}{y\left(\frac{(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{b}\right)^2}-\frac{Z}{z\left(\frac{(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)^2}=1$$

Quando l'ellissoide sia di rivoluzione attorno uno degli assi, che per fissare le idee sceglieremo quello delle x, allora dovrà essere $b=c$, e l'ultima equazione si ridurrà ad

$$Yz-Zy=0$$

la quale appartiene ad una retta che passa per l'origine, e che in questo caso coincide con il centro della sezione nel piano delle $y\,z$. L'inclinazione della normale ai tre assi ortogonali sarà inclusa nell'equazioni

$$\frac{a^2\cos\lambda}{x}=\frac{b^2\cos\mu}{y}=\frac{c^2\cos\nu}{z}$$

dalle quali ricaveremo con facilità per il valor comune

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\cos\mu}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\cos\nu}{\frac{z}{c^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

D'altronde la perpendicolare h abbassata dal centro dell'ellissoide sulla direzione del piano tangente sarà

$$h=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

e per conseguenza

$$\cos\lambda=\frac{hx}{a^2},\quad \cos\mu=\frac{hy}{b^2},\quad \cos\nu=\frac{hz}{c^2}$$

Infine per sapere se il piano tangente traversi la superficie dell'ellissoide, basterà di esaminare se più sistemi di valori delle X, Y, Z verificano le tre equazioni

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1$$

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

e si avrà

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}\right)-\left(\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}\right)^2=0$$

dalle quali si ricava con facilità

$$\left(\frac{Yz-Zy}{bc}\right)^2+\left(\frac{Zx-Xz}{ac}\right)^2+\left(\frac{Xy-Yx}{ab}\right)^2=0$$

quest'equazione non può esser soddisfatta che per i valori unici

$$X=x\,,\qquad Y=y\,,\qquad Z=z$$

e perciò il piano tangente non traversa la superficie dell'ellissoide, ma avrà un sol punto di contatto.

199.° Nell'iperboloide da una falda rappresentata dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

abbiamo per il piano tangente la superficie nel punto (x, y, z)

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-\frac{Zz}{c^2}=1$$

Quando si supponga noto il punto esterno (X, Y, Z) dal quale debba condursi un piano tangente alla superficie, converrà per conoscere i punti di contatti combinare le due ultime equazioni in modo, che fatto per brevità

$$x-\frac{X}{2}=\xi\,,\qquad y-\frac{Y}{2}=\eta\,,\qquad z-\frac{Z}{2}=\zeta$$

come anche

$$\frac{2\alpha}{a}=\frac{2\beta}{b}=\frac{2\gamma}{c}=\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

risulterà

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=1$$

la quale appartiene ad un'altra iperboloide di una falda, e di semiassi principali α, β, γ determinati dalla precedente condizione. L' intersecazione di questa superficie con la data farà conoscere i punti di contatto. L'equazioni della normale al punto (x, y, z) saranno

$$\frac{a^2(X-x)}{x}=\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{c^2(Z-z)}{-z}$$

le quali daranno separatamente per le projezioni nei tre piani ortogonali

$$\frac{X}{x\left(\frac{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right)^2}+\frac{Z}{z\left(\frac{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)^2}=1$$

$$\frac{Y}{y\left(\frac{(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{b}\right)^2}+\frac{Z}{z\left(\frac{(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)^2}=1$$

$$\frac{X}{x\left(\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right)^2}-\frac{Y}{y\left(\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{b}\right)^2}=1$$

Qui pure quando $a=b$, la projezione della normale passa per il centro della sezione principale con il piano delle xy; i coseni degli angoli λ, μ, ν si troveranno determinati nell'equazioni

$$\frac{a^2\cos\lambda}{x}=\frac{b^2\cos\mu}{y}=\frac{c^2\cos\nu}{-z}$$

ovvero

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\cos\mu}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\cos\nu}{\frac{-z}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

d'onde

$$\cos\lambda = \frac{hx}{a^2}, \quad \cos\mu = \frac{hy}{b^2}, \quad \cos\nu = -\frac{hz}{c^2}$$

h, indica secondo il consueto la perpendicolare abbassata dal centro della superficie sulla direzione del piano tangente. Qui pure per sapere se il piano tangente traverserà la superficie, dovremo cercare quei sistemi di valori di X, Y, Z, pei quali si verifichi simultaneamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}, \quad \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1 + \frac{Zz}{c^2}$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 + \frac{Z^2}{c^2}$$

si ricaverà

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right) - \left(\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2}\right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{Z^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{Zz}{c^2}\right)^2$$

ovvero

$$\left(\frac{Yx - Xy}{ab}\right)^2 = \left(\frac{Z - z}{c}\right)^2$$

quindi le due equazioni

$$\frac{Yx - Xy}{ab} = \frac{Z - z}{c}, \quad \frac{Yx - Xy}{ab} = -\frac{Z - z}{c}$$

le quali riunite a quella del piano, otterremo fra le coordinate X, Y, Z due sistemi di equazioni, che rappresentano due rette tracciate sulla superficie, in modo da racchiudere il punto (x, y, z), il quale se diviene mobile, ciascuna delle due rette si muoverà, e genererà l'iperboloide da una falda: tutte le generatrici di questa superficie incontrano il piano delle x, y, come si scorge dalle ultime due formole per la supposizione di $Z = z$, quindi supposto il punto nello stesso piano delle xy, si avranno i due sistemi di formole

$$\frac{Yx - Xy}{ab} = \frac{Z}{c}, \quad \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1$$

$$\frac{Yx - Xy}{ab} = -\frac{Z}{c}, \quad \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1$$

e dalle prime due si trova

$$X = -\frac{ay}{bc}Z + x, \qquad Y = \frac{bx}{ac}Z + y$$

e dalle ultime

$$X = \frac{ay}{bc}Z + x, \qquad Y = -\frac{bx}{ac}Z + y$$

Alla medesima conclusione saremmo giunti combinando l'equazione della superficie con l'equazione di una retta, ed analizzando le condizioni, perchè tutta intera fosse aderente alla superficie.

200.° Prendendo l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

la quale rappresenta la superficie dell'iperboloide da due

falde, sarà per il piano tangente

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-\frac{Zz}{c^2}=-1$$

Qui ancora, supponendo noto il punto (X, Y, Z) ed incognito il punto, od i punti (x, y, z) ai quali debba condursi il piano tangente dal punto esterno (X, Y, Z) si combineranno le due equazioni della superficie, e del piano tangente, in modo che supposto

$$x-\frac{X}{2}=\xi, \quad y-\frac{Y}{2}=\eta, \quad z-\frac{Z}{2}=\zeta$$

$$\frac{2\alpha}{a}=\frac{2\beta}{b}=\frac{2\gamma}{c}=-\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

si troverà

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=-1$$

la quale appartiene ad un'altra iperboloide da due falde, e l'intersecazioni di questa con la data determinerà i punti di contatto. L'equazioni alla retta normale sono comprese nelle medesime formole che per l'iperboloide da una falda: facendo in fine la consueta combinazione delle tre equazioni

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1, \quad \frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=\frac{Zz}{c^2}-1$$

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=\frac{Z^2}{c^2}-1$$

conosceremo se il piano tangente traverserà la superficie,

ed otterremo primieramente

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)-\left(\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{Z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{Zz}{c^2}-1\right)^2$$

dalla quale

$$\left(\frac{Yx-Xy}{ab}\right)^2+\left(\frac{Z-z}{c}\right)^2=0$$

quindi

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}, \qquad Z=z$$

quali valori di Z, e di X sostituiti nell'equazione del piano tangente ricaveremo

$$Y=y$$

e perciò

$$X=x, \qquad Y=y, \qquad Z=z$$

dunque unico è il punto di contatto dell'iperboloide da due falde con il piano tangente, il quale non traverserà la superficie.

201.° Per il paraboloide ellittico rappresentato dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$$

avremo dalla differenziazione

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=\frac{dz}{c}$$

quindi per l'equazione del piano tangente

$$\frac{(X-x)x}{a^2}+\frac{(Y-y)y}{b^2}=\frac{(Z-z)}{c}$$

e che si ridurrà

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=\frac{Z+z}{c}$$

Supponendo in queste formole, che sieno cognite le coordinate X, Y, Z del punto fuori della superficie, dal quale si conduca il piano tangente, avremo per la determinazione dei punti di contatto un'equazione ad un'altro paraboloide della medesima forma che il primo, e la quale si trova da una combinazione dell' equazioni della superficie, e del piano tangente, in modo che eseguita una sottrazione otterremo con facilità

$$\frac{\left(x-\frac{X}{2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-\frac{Y}{2}\right)^2}{b^2}=\frac{z-Z}{c}+\frac{X^2}{4a^2}+\frac{Y^2}{4b^2}$$

e ponendo per brevità

$$x-\frac{X}{2}=\xi,\quad y-\frac{Y}{2}=\eta,\quad z-Z=2\zeta$$

verrà per la richiesta equazione

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{2\zeta}{c}+\frac{X^2}{4a^2}+\frac{Y^2}{4b^2}$$

l'asse di questa superficie si trova determinato dalle due condizioni

$$\xi=0,\qquad \eta=0$$

ovvero

$$x = \frac{X}{2}, \qquad y = \frac{Y}{2}$$

ed il vertice da

$$\frac{2\zeta}{c} + \frac{X^2}{4a^2} + \frac{Y^2}{4b^2} = 0$$

d'onde per l'ordinata z di questo vertice

$$z = Z - \frac{c}{4}\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right)$$

L'equazioni della normale al punto (x, y, z) saranno per le consuete formole del parag. 193

$$\frac{a^2(X - x)}{x} = \frac{b^2(Y - y)}{y} = -c(Z - z)$$

Per avere un valor comune di queste tre frazioni, basterà moltiplicare respettivamente i numeratori, e denominatori per x, y, $2z$, ed otterremo

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{Z-z}{\frac{-1}{c}} = \frac{x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2z}{c}}$$

E siccome il denominatore ultimo si annulla, ed i primi membri non hanno valor infinito, così sussisteranno le equazioni

$$\frac{a^2(X - x)}{x} = \frac{b^2(Y - y)}{y}, \quad x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$$

Quest'ultima appartiene ad un piano tangente un' ellissoide di rivoluzione nel punto (x, y, z), e della quale

l'equazione sarà

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = C$$

e per conseguenza la normale al paraboloide ellittico sarà compresa in questo piano. I coseni degli angoli che la normale forma con i tre assi ortogonali saranno determinati dall'equazioni

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\cos\mu}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\cos\nu}{\frac{-1}{c}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}}$$

quindi osservando che la perpendicolare h abbassata dall' origine sulla direzione del piano tangente si esprime per

$$h = \frac{z}{c\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}}$$

si avrà

$$\cos\lambda = \frac{hc}{a^2}\frac{x}{z}, \quad \cos\mu = \frac{hc}{b^2}\frac{y}{z}, \quad \cos\nu = -\frac{h}{z}$$

Infine è molto facile di persuadersi che il piano tangente non traversa la superficie del paraboloide ellittico; infatti cercando i valori di X, Y, Z che oltre alle due equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}, \quad \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = \frac{Z + z}{c}$$

debbano anche soddisfare ad

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{2Z}{c}$$

si avrà

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\left(\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}\right)$$

e che si ridurrà ad

$$\left(\frac{X-x}{a}\right)^2+\left(\frac{Y-y}{b}\right)^2=0$$

alla quale si soddisfa per il valore unico

$$X=x\ ,\qquad Y=y$$

ciò che porta anche $Z=z$.

202.° Prendiamo in ultimo per le superficie del second'ordine priva di centro l' iperboloide iperbolico di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$$

si troverà per l'equazione del piano tangente

$$\frac{Xx}{a^2}-\frac{Yy}{b^2}=\frac{Z+z}{c}$$

Qui pure sottraendo queste due equazioni, e compiendo i quadrati imperfetti e facendo secondo il consueto

$$x-\frac{X}{2}=\xi,\quad y-\frac{Y}{2}=\eta,\quad z-Z=2\zeta$$

ricaveremo

$$\frac{\xi^2}{x^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{2\zeta}{c}+\frac{X^2}{4a^2}-\frac{Y^2}{4b^2}$$

la quale appartiene ad un'altro paraboloide iperbolico

della medesima forma che il primo, e servirà a risolvere il problema inverso, vale a dire; da un punto dato (X, Y, Z) condurre un piano tangente alla superficie; l'equazioni dell'asse della nuova superficie, sono

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \qquad \text{ovvero} \qquad x = \frac{X}{2}, \quad y = \frac{Y}{2}$$

ed il vertice è situato in un punto di quell'asse, corrispondente all'ordinata z determinata dalla equazione

$$\frac{2\zeta}{c} + \frac{X^2}{4a^2} - \frac{Y^2}{4b^2} = 0$$

ossia

$$z = Z - \frac{c}{4}\left(\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}\right)$$

L'equazioni della normale sono comprese nelle formole

$$\frac{a^2(X - x)}{x} + \frac{b^2(Y - y)}{y} = 0$$

$$x(X - x) + y(Y - y) + 2z(Z - z) = 0$$

L'ultima di queste equazioni appartiene ad un piano tangente un'ellissoide di rivoluzione al punto (x, y, z) col centro nell'origine delle coordinate, e di equazione

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = C$$

e per conseguenza la normale al paraboloide iperbolico sarà compresa in questo piano. Assoggettando poi le X, Y, Z a verificare le due equazioni

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \frac{2Z}{c}, \quad \frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = \frac{Z + z}{c}$$

otterremo le linee che passando per il punto (x, y, z) sono comuni alle superficie, ed al piano tangente, ed avremo dall'eliminazione delle z, Z per mezzo dell'equazione della superficie

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2\left(\frac{Xx}{a^2}-\frac{Yy}{b^2}\right)$$

d'onde

$$\left(\frac{X-x}{a}\right)^2=\left(\frac{Y-y}{b}\right)^2$$

ovvero

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}, \quad \frac{X-x}{a}=-\frac{(Y-y)}{b}$$

Riunendo a queste due l'equazione del piano tangente si avrà il sistema di due rette tracciate nel paraboloide iperbolico, e che racchiudono il punto (r, y, z), quale divenendo mobile ciascuna delle due rette genererà la superficie del paraboloide iperbolico, e si muoverà in modo che la sua projezione sul piano delle $x\,y$ resti parallela ad una di quelle rette secondo la quale il piano delle $x\,y$ taglia la superficie.

203.° L'equazioni di già stabilite al parag. 193 onde una retta sia normale ad una superficie curva in un dato punto, ci portano con gran facilità a stabilire dell'equazioni simili, onde una retta dicasi un'*asse* della superficie. Le proprietà dell'*asse* sono di esser perpendicolare alla superficie curva, e di passare per il centro unico della medesima, quando di questo ne sia dotata. Ciò posto sia

$$u=o, \qquad \text{od anche} \qquad u=C$$

l'equazione della superficie, x, y, z le tre coordinate rettilinee, ove l'asse incontra la superficie, ed α, β, γ

le coordinate del centro, ed R la distanza fra il centro ed il punto (x, y, z); l'equazioni dell'asse potranno essere della forma

$$\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}=\mathrm{R}$$

la lunghezza R dell'asse si esprimerà per

$$\mathrm{R}=\Big((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\varepsilon$$
$$+2(x-\alpha)(z-\gamma)\cos\varepsilon'+2(y-\beta)(z-\gamma)\cos\varepsilon''\Big)^{\frac{1}{2}}$$

D'altronde le condizioni onde una retta R sia normale alla superficie in un determinato punto sono come dal medesimo parag. 193

$$\frac{\mathrm{D}_x u}{a+b\cos\varepsilon+c\cos\varepsilon'}=\frac{\mathrm{D}_y u}{b+a\cos\varepsilon+c\cos\varepsilon''}$$
$$=\frac{\mathrm{D}_z u}{c+a\cos\varepsilon'+b\cos\varepsilon''}$$

quindi eliminando a, b, c per mezzo dei precedenti valori, si trova

$$\frac{\mathrm{D}_x u}{x-\alpha+(y-\beta)\cos\varepsilon+(z-\gamma)\cos\varepsilon'}=\frac{\mathrm{D}_y u}{y-\beta+(x-\alpha)\cos\varepsilon+(z-\gamma)\cos\varepsilon''}$$
$$=\frac{\mathrm{D}_z u}{z-\gamma+(x-\alpha)\cos\varepsilon'+(y-\beta)\cos\varepsilon''}$$

Tali sono le condizioni analitiche, onde una retta dicasi asse di una superficie curva dotata di un centro unico. Se per brevità si rappresentino per X, Y, Z i denominatori di $\mathrm{D}_x u$, $\mathrm{D}_y u$, $\mathrm{D}_z u$, e si moltiplichino respetti-

vamente i numeratori e denominatori per $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$, si otterrà con facilità il valor comune

$$\frac{D_x u}{X}=\frac{D_y u}{Y}=\frac{D_z u}{Z}=\frac{(x-\alpha)D_x u+(y-\beta)D_y u+(z-\gamma)D_z u}{R^2}$$

Supponendo inoltre che u sia una funzione omogenea del grado m delle tre variabili x, y, z allora dal teorema sulle funzioni omogenee

$$xD_x u + yD_y u + zD_z u = mC$$

e le precedenti formole si ridurranno ad

$$\frac{D_x u}{X}=\frac{D_y u}{Y}=\frac{D_z u}{Z}=\frac{mC-(\alpha D_x u+\beta D_y u+\gamma D_z u)}{R^2}$$

Queste differenti formole trovano delle interessanti applicazioni.

204.° Supponiamo che $u = C$ si riduca all'equazione di una superficie del second'ordine dotata di centro, e che noi rappresenteremo per

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz = K$$

avremo primieramente

$$D_x u = 2(Ax + Ez + Fy + G)$$

$$D_y u = 2(By + Dz + Fx + H)$$

$$D_z u = 2(Cz + Dy + Ex + I)$$

quindi se per brevità si chiami v, ciò che diviene la funzione $\frac{u}{2}$ per la sostituzione di α, β, γ in luogo di x, y, z, le antipenultime formole dell'antecedente parag.

diverranno

$$\frac{Ax + Ez + Fy + G}{x-\alpha+(y-\beta)\cos\varepsilon+(z-\gamma)\cos\varepsilon'} = \frac{By + Dz + Fx + H}{y-\beta+(x-\alpha)\cos\varepsilon+(z-\gamma)\cos\varepsilon''}$$

$$= \frac{Cz + Dy + Ex + I}{z - \gamma + (x - \alpha)\cos\varepsilon' + (y - \beta)\cos\varepsilon''}$$

$$= \frac{K - (xD_\alpha v + yD_\beta v + zD_\gamma v) - (G\alpha + H\beta + I\gamma)}{R^2}$$

Se le coordinate α, β, γ appartengono al centro, si verificheranno le condizioni

$$D_\alpha v = 0\,, \qquad D_\beta v = 0\,, \qquad D_\gamma v = 0$$

ossia

$$A\alpha + E\gamma + F\beta + G = 0\,, \quad B\beta + D\gamma + F\alpha + H = 0$$

$$C\gamma + D\beta + E\alpha + I = 0$$

dalle quali prendendo i valori di G, H, I e sostituiti nei numeratori delle tre frazioni, e fatto per brevità

$$S = K - (G\alpha + H\beta + I\gamma)$$

si ricaverà

$$\frac{A(x-\alpha) + E(z-\gamma) + F(y-\beta)}{x - \alpha + (y - \beta)\cos\varepsilon + (z - \gamma)\cos\varepsilon'}$$

$$= \frac{B(y-\beta) + D(z-\gamma) + F(x-\alpha)}{y - \beta + (x - \alpha)\cos\varepsilon + (z - \gamma)\cos\varepsilon''}$$

$$= \frac{C(z-\gamma) + D(y-\beta) + E(x-\alpha)}{z - \gamma + (x - \alpha)\cos\varepsilon' + (y - \beta)\cos\varepsilon''} = \frac{S}{R^2}$$

Le coordinate α, β, γ del centro daranno per via dell'eliminazione

$$\alpha = \frac{(D^2 - BC)\,G + (CF - DE)\,H + (BE - FD)\,I}{ABC + 2DEF - (AD^2 + BE^2 + CF^2)}$$

$$\beta = \frac{(E^2 - CA)\,H + (CF - DE)\,G + (AD - EF)\,I}{ABC + 2DEF - (AD^2 + BE^2 + CF^2)}$$

$$\gamma = \frac{(F^2 - AB)\,I + (BE - FD)\,G + (AD - EF)\,H}{ABC + 2DEF - (AD^2 + BE^2 + CF^2)}$$

Di più se nel secondo membro della S si sostituiscono i valori della G, H, I, questa diverrà

$$S = K + A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2\,(D\beta\gamma + E\alpha\gamma + F\alpha\beta)$$

ove sostituiti i trovati valori di α, β, γ e ponendo per brevità

$$U = ABC + 2DEF - (AD^2 + BE^2 + CF^2)$$

si trasformerà in

$$S = K + \frac{(BC - D^2)\,G^2 + (CA - E^2)\,H^2 + (AB - F^2)\,I^2}{U}$$

$$- 2\left(\frac{(AD - EB)\,HI + (BE - FD)\,GI + (CF - DE)\,GH}{U}\right)$$

Per ottenere poi l'equazione risultante prodotta dall'eliminazione di $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$, si faccia

$$p = \frac{S}{R^2}$$

ed insieme

$$D' = p\cos\varepsilon - D\,,\quad E' = p\cos\varepsilon' - E\,,\quad F' = p\cos\varepsilon'' - F$$

noi avremo le tre equazioni

$$(p-A)\,x + F'y + E'z = o\,,\quad (p-B)\,y + F'x + D'z = o$$

$$(p - C)\,z + E'x + D'y = o$$

Il valore di p, che si deduce dall'eliminazione di queste tre equazioni si può anche ottenere sotto altre formole dall'eguaglianza delle tre frazioni ad $\frac{S}{R^2}$; infatti richiamando l'equazioni dell'asse nel parag. antecedente verrà

$$p = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dbc + 2Eac + 2Fab$$

Infine eliminando le x, y, z risulterà l'equazione di terzo grado

$$(p-A)(p-B)(p-C) - (p-A)(p\cos\varepsilon - D)^2 - (p-B)(p\cos\varepsilon' - E)^2$$

$$-(p-C)(p\cos\varepsilon'' - F)^2 + 2(p\cos\varepsilon - D)(p\cos\varepsilon' - E)(p\cos\varepsilon'' - F) = o$$

Eseguendo tutte le indicate moltiplicazioni, e facendo per i coefficienti delle potenze p^3, p^2, p.

$$L = 1 - \cos^2\varepsilon - \cos^2\varepsilon' - \cos^2\varepsilon'' + 2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''$$

$$M = A\,\mathrm{sen}^2\varepsilon + B\,\mathrm{sen}^2\varepsilon' + C\,\mathrm{sen}^2\varepsilon'' + 2D(\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'' - \cos\varepsilon)$$

$$+ 2E(\cos\varepsilon\cos\varepsilon'' - \cos\varepsilon') + 2F(\cos\varepsilon\cos\varepsilon' - \cos\varepsilon'')$$

$$N = AB - D^2 + AC - E^2 + BC - F^2 - 2(AD - EF)\cos\varepsilon$$

$$- 2(BE - DF)\cos\varepsilon' - 2(CF - DE)\cos\varepsilon''$$

verrà

$$Lp^3 - Mp^2 + Np - U = o$$

Tal'è l'equazione dalla quale dipende la determinazione degli assi principali di una superficie del second'ordine

dotata di centro: alla medesima era giunto fin dal 1811 il sig. *Binet* in due Memorie inserite nel 16 Cah. del giornale della scuola politecnica, ed in seguito si trova anche in una Memoria del sig. *Jacobi* nel vol. 2.° del giornale del sig. Crelle. Non essendo qui il momento di fermarci sulla discussione di questa equazione ci basterà asserire che le sue radici sono reali, ed una almeno diversa da zero. Sostituendo poi il valore di p dato per R troveremo l'equazione di sesto grado

$$UR^6 - NSR^4 + MS^2 R^2 - LS^3 = o$$

della quale le tre radici R^2 porgeranno i valori dei quadrati dei semiassi principali di una superficie di secondo ordine dotata di centro.

205.° Per mostrare una qualche applicazione sieno a, b, c i tre semiassi principali di un ellissoide, ed a', b', c' tre semidiametri obliqui e conjugati, l'equazione della superficie con l'origine al centro, e riferita a questi tre ultimi, sarà

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

e perciò

$$A = \frac{1}{a'^2}, \quad B = \frac{1}{b'^2}, \quad C = \frac{1}{c'^2}, \quad K = 1, \quad D = E = F = o$$

$G = H = I = o$; quindi

$$M = \frac{b'^2 c'^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon + a'^2 c'^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon' + a'^2 b'^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon''}{a'^2 b'^2 c'^2}$$

$$N = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{a'^2 b'^2 c'^2}, \quad S = 1, \quad U = \frac{1}{a'^2 b'^2 c'^2}$$

Con questi valori l'equazione di sesto grado diviene

$$R^6-(a'^2+b'^2+c'^2)R^4+(b'^2c'^2\operatorname{sen}^2\varepsilon+a'^2c'^2\operatorname{sen}^2\varepsilon'+a'^2b'^2\operatorname{sen}^2\varepsilon'')R^2$$
$$-a'^2b'^2c'^2(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'')=0$$

Le tre radici R^2 sono eguali respettivamente ai tre quadrati a^2, b^2, c^2 dei semiassi principali della superficie, e per conseguenza

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=a'^2b'^2\operatorname{sen}^2\varepsilon''+a'^2c'^2\operatorname{sen}^2\varepsilon'+b'^2c'^2\operatorname{sen}^2\varepsilon$$

$$a^2b^2c^2=a'^2b'^2c'^2(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'')$$

Queste equazioni ci porgono l'enunciato di tre belle proprietà dell'ellissoide, e che noi per brevità tralasciamo di fare. Aggiungeremo ancora che l'equazione di terzo grado relativa a p, o di sesto grado relativa ad R serve ad indicare certe proprietà delle superficie del secondo ordine. Così supponendo che l'ellissoide con l'origine al centro sia riferita a tre assi ortogonali qualunque, avremo per la sua equazione

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy=K$$

In questo caso

$$\cos\varepsilon=0\ ,\quad \cos\varepsilon'=0\ ,\quad \cos\varepsilon''=0$$

per cui

$$L=1\ ,\quad M=A+B+C$$
$$N=AB-D^2+AC-E^2+BC-F^2$$

e per l'equazione di terzo grado risulterà

$$p^3-Mp^2+Np-U=0$$

le radici sono come già abbiamo osservato di sopra

$$p = \frac{K}{a^2}\ ,\quad p = \frac{K}{b^2}\ ,\quad p = \frac{K}{c^2}$$

quindi per le note proprietà fra i coefficienti dell'equazioni, e radici

$$K\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = A + B + C$$

$$K^2\left(\frac{1}{a^2\,b^2} + \frac{1}{a^2\,c^2} + \frac{1}{b^2\,c^2}\right) = AB - D^2 + AC - E^2 + BC - F^2$$

$$\frac{K^3}{a^2\,b^2\,c^2} = ABC + 2DEF - (AD^2 + BE^2 + CF^2)$$

Se ora dal centro dell'ellissoide si conducano tre raggi vettori r', r'', r''' ai punti ove la superficie viene incontrata dagli assi delle x, delle y, e delle z si avrà

$$A = \frac{K}{r'^2},\quad B = \frac{K}{r''^2},\quad C = \frac{K}{r'''^2}$$

quindi la prima delle tre formole porgerà

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} + \frac{1}{r'''^2}$$

Questa equazione ci dice, che se dal centro dell'ellissoide si conducano tre raggi qualunque perpendicolari fra di loro a tre punti della superficie, la somma dei quadrati dell'unità divisa per i rispettivi raggi mantiene costantemente uno stesso valore, il quale si riduce alla somma dei quadrati dell'unità divisa per i tre semiassi principali. Tutte queste differenti proprietà dell' ellissoide si verificano per convenienti modificazioni nelle due iperboloidi.

Sopra le due Curvature di una curva tracciata nello spazio. Raggio, e Centro di Curvatura; Circolo osculatore, e posizione del Centro.

206.° Consideriamo una curva qualunque riferita a tre assi ortogonali, od obliqui: sieno x, y, z ed $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ le coordinate di due punti infinitamente vicini dell'arco Δs infinitesimo; conduciamo agli estremi dell'arco le rette tangenti ed i piani osculatori: l'angolo delle due rette tangenti si chiama angolo di *contingenza*, e l'angolo dei piani osculatori si chiamerà angolo di *flessione*; questo ultimo si annulla quante volte la curva sia interamente situata in un piano. Si chiami ω l'angolo di contingenza, ed Ω l'angolo di flessione, le due qnantità ω, Ω convergeranno verso lo zero per valori nulli degli incrementi Δx, Δy, Δz, Δs, ma i limiti dei rapporti

$$\pm\frac{\omega}{\Delta s}, \quad \pm\frac{\Omega}{\Delta s}$$

convergeranno verso quantità finite differenti da zero; quando la curva è piana, il primo limite rappresenta la curvatura, ed il secondo si riduce a zero, qnindi è che nel caso generale i medesimi due limiti si chiameranno *prima*, e *seconda curvatura* della curva proposta. Quella curva che non è compresa tutta in un piano presenta le due curvature, si chiama *curva a doppia curvatura.* Sieno ρ, ed R i raggi dei circoli ai quali appartengono queste due curvature, si avrà

$$\frac{1}{\rho}=\lim\left(\pm\frac{\omega}{\Delta s}\right), \quad \frac{1}{R}=\lim\left(\pm\frac{\Omega}{\Delta s}\right)$$

Si conducano ora per i punti estremi (x, y, z)

$(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ due piani normali alla curva, è chiaro che la corda c dell' arco Δs compreso fra i due indicati punti sarà prossimamente perpendicolare ai due piani normali, ed il limite verso il quale converge la più corta distanza r del punto (x, y, z) dalla linea d'intersezione dei due piani normali coinciderà con il raggio ρ. Immaginiamo un piano, che racchiuda la distanza r, e che sia perpendicolare ai due piani normali, la corda c dell' arco Δs formerà un piccolissimo angolo i con la sua projezione sopra questo piano, e si esprimerà per

$$c \cos i$$

Nel triangolo formato dalla lunghezza r, e dalla projezione $c \cos i$, l'angolo opposto ad r è prossimamente retto, e l'angolo opposto al lato $c \cos i$ sarà eguale all'angolo dei piani normali, ossia all'angolo ω delle due tangenti condotte per l'estremità dell'arco Δs, ed avremo col chiamare ε un numero infinitamente piccolo

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right)}{r} = \frac{\operatorname{sen} \omega}{c \cos i} = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega \cos i} \cdot \left(\pm \frac{\Delta s}{c}\right)\left(\pm \frac{\omega}{\Delta s}\right)$$

d'onde ai limiti per $\omega = o = i = \Delta s = c \ldots$

$$\frac{1}{\lim r} = \lim\left(\pm \frac{\omega}{\Delta s}\right) = \frac{1}{\rho}$$

ovvero

$$\rho = \lim r$$

È facile adesso accertarsi che il raggio ρ è nella direzione della normale principale; ed infatti il piano osculatore condotto per il punto (x, y, z) sarà prossimamente perpendicolare ai piani normali condotti per l'estremità dell'arco Δs, ed alla loro comune intersezione,

e perciò la più piccola lunghezza condotta dal punto (x, y, z) alla linea d'intersezione dei due piani normali si confonderà prossimamente con la normale compresa nel piano osculatore, ossia con la normale principale; dunque per ottenere il raggio ρ si cercherà l' intersezione della normale principale, e di un piano normale infinitamente piccolo; la retta compresa fra questo punto d'intersezione, ed il punto (x, y, z) si chiama il *raggio di curvatura* della curva proposta, come si dirà *centro di curvatura* l' indicato punto d' incontro: ed insieme *circolo osculatore* della curva, od anche *circolo* di *curvatura*, il circolo descritto con questo raggio; il medesimo tocca la curva alla propria curvatura. Infine avvertendo che la retta tangente nel punto (x, y, z) comune alla curva ed al circolo osculatore, e la normale principale sono situate nel piano osculatore, ne verrà che il piano del circolo osculatore trovasi nel piano osculatore stesso della curva.

207.° L'espressione del raggio ρ di curvatura, o del circolo osculatore può subire alcune trasformazioni, che è ben di conoscere. Infatti se si ponga per brevità

$$a + \Delta a = a', \qquad b + \Delta b = b', \qquad c + \Delta c = c'$$

avremo per l'angolo ω delle due rette tangenti

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}$$

$$\frac{X-(x+\Delta x)}{a'} = \frac{Y-(y+\Delta y)}{b'} = \frac{Z-(z+\Delta z)}{c'}$$

la formola

$$\cos\omega = aa' + bb' + cc' + (ab' + a'b)\cos\varepsilon + (ac' + a'c)\cos\varepsilon' + (bc' + c'b)\cos\varepsilon''$$

quindi ritenendo le due condizioni

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \varepsilon + 2ac \cos \varepsilon' + 2bc \cos \varepsilon''$$

$$1 = a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2a'b' \cos \varepsilon + 2a'c' \cos \varepsilon' + 2b'c' \cos \varepsilon''$$

e formando dalla somma di queste la differenza

$$2(1 - \cos \omega) = 4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \omega$$

risulterà con gran facilità

$$4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \omega = \Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2 + 2 \Delta a \, \Delta b \cos \varepsilon$$

$$+ 2 \Delta a \, \Delta c \cos \varepsilon' + 2 \Delta b \, \Delta c \cos \varepsilon''$$

Dividendo ora il primo, e secondo membro per Δs^2, si avrà ancora

$$\left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega}\right)^2 \frac{\omega^2}{\Delta s^2} = \left(\frac{\Delta a}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\Delta s}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta a}{\Delta s}\right)\left(\frac{\Delta b}{\Delta s}\right) \cos \varepsilon$$

$$+ 2 \left(\frac{\Delta a}{\Delta s}\right)\left(\frac{\Delta c}{\Delta s}\right) \cos \varepsilon' + 2 \left(\frac{\Delta b}{\Delta s}\right)\left(\frac{\Delta c}{\Delta s}\right) \cos \varepsilon''$$

Passando ai limiti, ed estraendo la radice seconda, avremo per il raggio della prima curvatura

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2 + 2 da \, db \cos \varepsilon + 2 da \, dc \cos \varepsilon' + 2 db \, dc \cos \varepsilon''}}$$

Nel caso degli assi ortogonali, a, b, c rappresentano i coseni degli angoli α, β, γ che la retta tangente forma

con i medesimi assi, e perciò in quest'ipotesi

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2}}$$

Nella stessa guisa se L, M, N sieno i tre angoli che una retta perpendicolare al piano osculatore forma con i tre assi ortogonali, otterremo per l'angolo Ω dei due piani osculatori infinitamente vicini

$$4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\Omega = (\Delta \cos L)^2 + (\Delta \cos M)^2 + (\Delta \cos N)^2$$

quindi per il raggio della seconda curvatura, come si ha da una formola del parag. 206 verrà

$$R = \frac{ds}{\sqrt{(d\cos L)^2 + (d\cos M)^2 + (d\cos N)^2}}$$

Questa formola sarà suscettibile di diverse trasformazioni simili a quelle che noi verremo ad indicare per il raggio ρ della prima curvatura.

208.° Ripresa l' ipotesi degli assi obliqui si sostituiscano nell' espressione del raggio ρ di curvatura, i valori

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds}$$

ed eseguendo tutte le differenziazioni indicate, e ponendo come già si è fatto al parag. 182 non solo

$$\xi = x + y\cos\varepsilon + z\cos\varepsilon'$$

$$\eta = y + x\cos\varepsilon + z\cos\varepsilon''$$

$$\zeta = z + x\cos\varepsilon' + y\cos\varepsilon''$$

ma ben anche

$$\text{a} = ds\, d^2x - dx\, d^2s\,,\qquad \text{b} = ds\, d^2y - dy\, d^2s$$

$$\text{c} = ds\, d^2z - dz\, d^2s$$

ed insieme

$$A = ds\, d^2\xi - d\xi\, d^2s\,,\qquad B = ds\, d^2\eta - d\eta\, d^2s$$

$$C = ds\, d^2\zeta - d\zeta\, d^2s\,,$$

si avrà

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{\text{a}\,A + \text{b}\,B + \text{c}\,C}}$$

Fra i coefficienti A, B, C, ed a, b, c sussistono le medesime relazioni che fra le coordinate x, y, z, ed ξ, η, ζ, cioè

$$A = \text{a} + \text{b}\cos\varepsilon + \text{c}\cos\varepsilon'$$

$$B = \text{b} + \text{a}\cos\varepsilon + \text{c}\cos\varepsilon''$$

$$C = \text{c} + \text{a}\cos\varepsilon' + \text{b}\cos\varepsilon''$$

Che se si sostituiscano tutti i valori delle sei quantità A, B, C, ed a, b, c, si troverà

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x\, d^2\xi + d^2y\, d^2\eta + d^2z\, d^2\zeta - (d^2s)^2}}$$

Prendendo l'arco s per variabile indipendente si ridurrà ad

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x\, d^2\xi + d^2y\, d^2\eta + d^2z\, d^2\zeta}}$$

Nell'ipotesi degli assi ortogonali, i coefficienti A, B, C divengono respettivamente eguali ad a, b, c come accade

per le ξ, η, ζ eguali ad x, y, z e per conseguenza

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Pongasi ora

$$U = dy\, d^2z - dz\, d^2y\,, \qquad V = dz\, d^2x - dx\, d^2z$$

$$W = dx\, d^2y - dy\, d^2x$$

ed osservando che

$$U^2 + V^2 + W^2 = ds^2\left((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2 \right)$$

come succede per $A^2 + B^2 + C^2$ si avrà egualmente

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}$$

Qui pure volendo prendere s per variabile indipendente, otterremo

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}$$

Che se una delle coordinate x sia presa per variabile indipendente, allora dalle funzioni derivate

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx}, \quad z'' = \frac{dz'}{dx}$$

troveremo

$$y''dx^3 = dx\, d^2y - dy\, d^2x = W$$

$$z''dx^3 = dx\, d^2z - dz\, d^2x = -V$$

$$(z'y'' - y'z'')dx^3 = dz\, d^2y - dy\, d^2z = -U$$

d'onde

$$\rho = \pm \frac{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Tali sono le differenti espressioni del raggio di curvatura. Supponiamo adesso che uno dei piani coordinati x, y sia parallelo al piano osculatore; si verificherà $dz = 0$, $d^2z = 0$, e perciò

$$\rho = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Quest'espressione appartiene al raggio di curvatura della projezione della curva nel piano osculatore: questa sola circostanza di trasformazione di piani coordinati permette di poter stabilire, che i raggi di curvatura di una curva tracciata nello spazio, e della sua projezione nel piano osculatore ottengono un medesimo valore.

209°. Veniamo ora brevemente ad indicare alcune trasformazioni che può ricevere l'espressione del raggio R di flessione; siccome già si è fatto al parag. 187 L, M, N sieno gli angoli formati con i tre assi ortogonali da una retta elevata perpendicolarmente al piano osculatore della curva nel punto (x, y, z); avremo per il loro valore assoluto

$$\cos L = \frac{U}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}$$

$$\cos M = \frac{V}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}$$

$$\cos N = \frac{W}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}$$

il raggio di flessione sarà definito dalla formola

$$R = \frac{ds}{dE}$$

ove

$$dE = \sqrt{(d\cos L)^2 + (d\cos M)^2 + (d\cos N)^2}$$

Venendo adunque alla differenziazione dei tre coseni, sarà

$$d\cos L = \frac{(U^2 + V^2 + W^2)\, dU - U\,(UdU + VdV + WdW)}{(U^2 + V^2 + W^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\cos M = \frac{(U^2 + V^2 + W^2)\, dV - V\,(UdU + VdV + WdW)}{(U^2 + V^2 + W^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\cos N = \frac{(U^2 + V^2 + W^2)\, dW - W\,(UdU + VdV + WdW)}{(U^2 + V^2 + W^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Elevando al quadrato, e sommando, otterremo

$$dE^2 = \frac{(U^2 + V^2 + W^2)\,(dU^2 + dV^2 + dW^2) - (UdU + VdV + WdW)^2}{(U^2 + V^2 + W^2)^3}$$

la quale si potrà anche rappresentare per

$$dE^2 = \frac{(UdV - VdU)^2 + (VdW - WdV)^2 + (WdU - UdW)^2}{(U^2 + V^2 + W^2)^3}$$

La differenziazione diretta di U, V, W, porge

$$dU = dy\, d^3z - dz\, d^3y\,, \quad dV = dz\, d^3x - dx\, d^3z$$

$$dW = dx\, d^3y - dy\, d^3x$$

d'onde

$$UdV - VdU = dz\,(Ud^3x + Vd^3y + Wd^3z)$$

$$VdW - WdV = dx\,(Ud^3x + Vd^3y + Wd^3z)$$

$$WdU - UdW = dy\,(Ud^3x + Vd^3y + Wd^3z)$$

Facendo la somma dei quadrati, e sostituiti nel secondo membro del valore di dE^2, verrà

$$dE^2 = \frac{ds^2\,(Ud^3x + Vd^3y + Wd^3z)^2}{(U^2 + V^2 + W^2)^2}$$

ed estraendo la radice quadrata

$$dE = \frac{ds\,(Ud^3x + Vd^3y + Wd^3z)}{U^2 + V^2 + W^2}$$

Questa formola è dovuta a *Lancret*; quindi il raggio di flessione si trasformerà in

$$R = \frac{(U^2 + V^2 + W^2)}{Ud^3x + Vd^3y + Wd^3z}$$

Che se di più si sostituiscano nel denominatore i valori di U, V, W espressi dai coseni degli angoli L, M, N, sarà

$$R = \frac{(U^2 + V^2 + W^2)^{\frac{1}{2}}}{\cos Ld^3x + \cos Md^3y + \cos Nd^3z}$$

nella quale introducendovi il raggio di curvatura ρ determinato dalla formola

$$\rho = \frac{ds^3}{(U^2 + V^2 + W^2)^{\frac{1}{2}}}$$

verrà

$$R = \frac{ds^3}{\rho\,(\cos L d^3x + \cos M d^3y + \cos N d^3z)}$$

od anche più brevemente

$$R = \frac{1}{\rho(x'''\cos L + y'''\cos M + z'''\cos N)}$$

In questa formola x''', y''', z''' sono le funzioni derivate terze da x, y, z, considerate come funzioni dell'arco s. Infine avvertendo che

$$\frac{\cos L}{U} = \frac{\cos M}{V} = \frac{\cos N}{W} = \frac{1}{(U^2 + V^2 + W^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{U \cos L + V \cos M + W \cos N}{U^2 + V^2 + W^2}$$

risulterà facilmente

$$(U^2 + V^2 + W^2)^{\frac{1}{2}} = U \cos L + V \cos M + W \cos N$$

e quindi

$$R = \frac{U \cos L + V \cos M + W \cos N}{\cos L\, d^3x + \cos M\, d^3y + \cos N\, d^3z}$$

Tali sono le differenti forme che può assumere l'espressione del raggio R di flessione.

210.° La posizione del centro di curvatura si potrà avere dai valori delle tre coordinate X, Y, Z del medesimo centro, ed otterremo primieramente

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 + 2\,(X-x)\,(Y-y) \cos \varepsilon$$

$$+ 2\,(X-x)\,(Z-z) \cos \varepsilon' + 2\,(Y-y)\,(Z-z) \cos \varepsilon'' = \rho^2$$

quindi dovendo essere il centro di curvatura, ed il raggio ρ nella direzione della normale principale sussisteranno l'equazioni come dal parag. 186

$$\frac{X - x}{ds\, d^2x - dx\, d^2s} = \frac{Y - y}{ds\, d^2y - dy\, d^2s} = \frac{Z - z}{ds\, d^2z - dz\, d^2s}$$

delle quali il valore comune sarà

$$\frac{\rho}{\sqrt{a A + b B + c C}}$$

e per conseguenza

$$X - x = \rho^2 \frac{(ds\, d^2x - dx\, d^2s)}{ds^3}$$

$$Y - y = \rho^2 \frac{(ds\, d^2y - dy\, d^2s)}{ds^3}$$

$$Z - z = \rho^2 \frac{(ds\, d^2z - dz\, d^2s)}{ds^3}$$

le quali avranno luogo in qualunque sistema di coordinate rettilinee. Quando l'equazioni della normale principale, e del raggio di curvatura si presentino sotto la forma

$$\frac{X - x}{a_1} = \frac{Y - y}{b_1} = \frac{Z - z}{c_1} = \rho$$

si ricaverà per le funzioni trigonometriche a_1, b_1, c_1

$$a_1 = \rho \frac{(ds\, d^2x - dx\, d^2s)}{ds^3}$$

$$b_1 = \rho \frac{(ds\, d^2y - dy\, d^2s)}{ds^3}$$

$$c_1 = \rho \frac{(ds\, d^2z - dz\, d^2s)}{ds^3}$$

Con questi valori si conoscerà l'inclinazione del raggio di curvatura con i tre assi coordinati: quando ds sia costante, le precedenti espressioni diverranno

$$X-x=\rho^2\frac{d^2x}{ds^2}\,,\quad Y-y=\rho^2\frac{d^2y}{ds^2}\,,\quad Z-z=\rho^2\frac{d^2z}{ds^2}$$

ed

$$a_1=\rho\frac{d^2x}{ds^2}\,,\quad b_1=\rho\frac{d^2y}{ds^2}\,,\quad c_1=\rho\frac{d^2z}{ds^2}$$

Le funzioni trigonometriche a_1, b_1, c_1 si riducono ai coseni degli angoli λ, μ, ν che il raggio di curvatura forma con i tre assi nell'ipotesi che sieno ortogonali.

211.° Per avere poi quelle espressioni le quali si prestino ad una più facile applicazione, riprendiamo l'ipotesi degli assi ortogonali, e sostituendo il valore di ρ dato per le quantità, U, V, W come si è fatto nel parag. 208 si troverà con facilità

$$X-x=\frac{V\,dz-W\,dy}{U^2+V^2+W^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

$$Y-y=\frac{W\,dx-U\,dz}{U^2+V^2+W^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

$$Z-z=\frac{U\,dy-V\,dx}{U^2+V^2+W^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

e quindi per l'inclinazione ai tre assi

$$\cos\lambda=\rho\frac{\left(d\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\,,\quad \cos\mu=\rho\frac{\left(d\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\,,\quad \cos\nu=\rho\frac{\left(d\frac{dz}{ds}\right)}{ds}$$

come si era trovato per le a_1, b_1, c_1 . . . Assumendo

la x per variabile indipendente come già si è fatto nell'antecedente parag. 208 le differenze $X-x$, diverranno

$$X-x=-\frac{y'y''+z'z''}{(y'z''-y''z')^2+z''^2+y''^2}(1+y'^2+z'^2)$$

$$Y-y=\frac{z'(z'y''-z''y')+y''}{(y'z''-y''z')^2+z''^2+y''^2}(1+y'^2+z'^2)$$

$$Z-z=\frac{y'(y'z''-y''z')+z''}{(y'z''-y''z')^2+z''^2+y''^2}(1+y'^2+z'^2)$$

212.° Le differenze $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ in un sistema di assi rettilinei, sono evidentemente legate dall'equazione

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2+2(X-x)(Y-y)\cos\varepsilon$$
$$+2(X-x)(Z-z)\cos\varepsilon'+2(Y-y)(Z-z)\cos\varepsilon''=\rho^2$$

la quale, richiamando i valori di X_1, Y_1, Z_1 di già stabiliti al parag. 185, ed i valori di ξ, η, ζ si trasformerà in

$$(X-x)(X_1-\xi)+(Y-y)(Y_1-\eta)+(Z-z)(Z_1-\zeta)=\rho^2$$

Le nuove differenze

$$X_1-\xi\,,\qquad Y_1-\eta\,,\qquad Z_1-\zeta$$

si riducono alle consuete differenze

$$X-x\,,\qquad Y-y\,,\qquad Z-z$$

per la supposizione degli assi ortogonali. Che se i valori delle differenze medesime $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ espresse per dx, dy, dz ed ottenute nell' antecedente parag. si moltiplichino respettivamente per $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$,

ed anche per $d^2\xi$, $d^2\eta$, $d^2\zeta$, e si faccia in seguito la somma, otterremo

$$(X - x)\, d\xi + (Y - y)\, d\eta + (Z - z)\, d\zeta = 0$$

$$(X - x)\, d^2\xi + (Y - y)\, d^2\eta + (Z - z)\, d^2\zeta$$
$$- dx\, d\xi - dy\, d\eta - dz\, d\zeta = 0$$

ove per il differenziale ds dell'arco si ha evidentemente

$$ds^2 = dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta$$

La prima delle due ultime equazioni appartiene al piano normale, e perciò da questa, e dal valore di ρ si conclude che il raggio di curvatura, come d'altronde è chiaro, trovasi nel piano normale: aggiungiamo poi che le medesime equazioni si ottengono ancora da una successiva differenziazione del valore di ρ^2, considerando le coordinate X, Y, Z del centro ed il raggio ρ come costanti; se dunque sia cognito il raggio di curvatura ρ, le tre equazioni nelle quali trovansi le differenze $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ saranno sufficienti a determinare la grandezza, e la posizione del circolo osculatore. Nell'ipotesi degli assi ortogonali noi avremo le tre equazioni

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = \rho^2$$

$$(X - x)\, dx + (Y - y)\, dy + (Z - z)\, dz = 0$$

$$(X-x)d^2x + (Y-y)d^2y + (Z-z)d^2z - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$$

213.° Il circolo osculatore, il raggio, e centro di curvatura godono di diverse proprietà che è utile di conoscere; così sarà facile di persuadersi, che il centro di curvatura coincide con il punto d'intersezione del piano osculatore con due piani normali consecutivi: infatti ri-

presa l'equazione del piano normale

$$(X - x)\, d\xi + (Y - y)\, d\eta + (Z - z)\, d\zeta = o$$

si passerà all' equazione del piano normale consecutivo col differenziare questa nella supposizione di X, Y, Z costanti, ciò che porterà ad una equazione di già trovata

$$(X-x)\, d^2\xi + (Y-y)\, d^2\eta + (Z-z)\, d^2\zeta - ds^2 = o$$

Riunendo alle precedenti l'equazione del piano osculatore

$$(X-x)(dy\, d^2z - dz\, d^2y) + (Y-y)(dz\, d^2x - dx\, d^2z)$$
$$+ (Z - z)(dx\, d^2y - dy\, d^2x) = o$$

ed eseguendo l'eliminazione successiva delle tre differenze $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ si troveranno queste coincidere con quelle di sopra stabilite. A questa proprietà ne aggiungeremo due altre, le quali riguardano in particolare il raggio di curvatura, e che per maggior brevità verremo a sviluppare nella supposizione degli assi ortogonali.

Riflettendo che un circolo è completamente individuato, quando si conosca la posizione di tre punti per i quali deve passare, sarà facile il prevedere, che il circolo osculatore una curva in un dato punto non sarà diverso dal limite verso il quale converge il circolo secante la medesima curva in tre punti infinitamente vicini: questi medesimi punti servendo di limite al piano che si chiama osculatore, ne verrà che il circolo osculatore sarà situato nel piano osculatore; inoltre non esistendo nel piano osculatore, che una normale unica alla curva, e questa principale, dedurremo perciò, come già si è veduto, che il raggio di curvatura ρ è nella direzione della normale principale. L'equazione del circolo

trisecante la curva nei punti $(x,\ y,\ z)$
$(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$
$\left((1+\Delta)^2 x\,,\quad (1+\Delta)^2 y\,,\quad (1+\Delta)^2 z\right)$, e la grandezza del raggio ρ, dipenderanno dai valori delle coordinate X, Y, Z determinate dalla coesistenza delle formole

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=\rho^2$$

$$\Big(X-(x+\Delta x)\Big)^2+\Big(Y-(y+\Delta y)\Big)^2+\Big(Z-(z+\Delta z)\Big)^2=\rho^2$$

$$\Big(X-(1+\Delta)^2 x\Big)^2+\Big(Y-(1+\Delta)^2 y\Big)^2+\Big(Z-(1+\Delta)^2 z\Big)^2=\rho^2$$

Facendo i sviluppi si ridurranno ad

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=\rho^2$$

$$2(X-x)\Delta x+2(Y-y)\Delta y+2(Z-z)\Delta z-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2=0$$

$$2(X-x)\,\Delta^2 x+2\,(Y-y)\,\Delta^2 y+2\,(Z-z)\,\Delta^2 z$$

$$-2(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)-4\,(\Delta x\,\Delta^2 x+\Delta y\,\Delta^2 y+\Delta z\,\Delta^2 z)$$

$$-\Big((\Delta^2 x)^2+(\Delta^2 y)^2+(\Delta^2 z)^2\Big)=0$$

L'eliminazione ci fornisce i valori delle X, Y, Z nel caso anche che i tre punti della curva coincidano in un punto unico $(r,\ y,\ z)$, quindi se α sia la base degli infinitesimi, dovremo dividere la seconda per α, e la terza per α^2, ed osservando che nel limite

$$dx=\lim\frac{\Delta x}{\alpha}\,,\quad .\ .\ .\ .\ .\quad d^2x=\lim\frac{\Delta^2 x}{\alpha^2}$$

si otterranno tre equazioni coincidenti alle ultime di già

trovate nel parag. 212. Queste tre equazioni serviranno a determinare le coordinate del centro X, Y, Z in funzione del raggio: alle quali però aggiungendoci l'equazioni della normale principale

$$\frac{X-x}{ds\, d^2x - dx\, d^2s} = \frac{Y-y}{ds\, d^2y - dy\, d^2s} = \frac{Z-z}{ds\, d^2z - dz\, d^2s}$$

avremo in fine i valori delle quattro incognite X, Y, Z, ρ dalle quali la posizione, e la grandezza del circolo verrà completamente determinata.

214.° Veniamo in fine a far vedere, come il raggio di curvatura possa dipendere dal valore di un certo limite di già determinato per le curve piane. A partir dal punto (x, y, z) si porti una lunghezza i infinitamente piccola sulla tangente, e sulla curva; è evidente che nell'ipotesi degli assi ortogonali, le coordinate dell'estremo della i sulla direzione della tangente saranno

$$x + i\cos\alpha\,, \quad y + i\cos\beta\,, \quad z + i\cos\gamma$$

e chiamandole respettivamente x', y', z', si ridurranno ad

$$x' = x + i\frac{dx}{ds}\,, \quad y' = y + i\frac{dy}{ds}\,, \quad z' = z + i\frac{dz}{ds}$$

Considerando poi le coordinate x, y, z funzioni dell'arco s preso qual variabile indipendente, avremo per le coordinate dell'estremo i nella direzione della curva

$$x+\Delta x = \varphi(s+i)\,, \quad y+\Delta y = \psi(s+i)\,, \quad z+\Delta z = \chi(s+i)$$

Sviluppando i secondi membri per le note serie, e

chiamando I, I', I'' i resti dopo il terzo termine sarà

$$x + \Delta x = x + i\frac{dx}{ds} + \frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + I\right)$$

$$y + \Delta y = y + i\frac{dy}{ds} + \frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + I'\right)$$

$$z + \Delta z = z + i\frac{dz}{ds} + \frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} + I''\right)$$

Sia ora k la retta che unisce i punti (x', y', z') $(x + \Delta x, \; y + \Delta y, \; z + \Delta z)$, otterremo con facilità

$$k = \frac{i^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} + I\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} + I'\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} + I''\right)^2}$$

L'inclinazione di questa retta con gli assi ortogonali sarà determinata da tre angoli λ, μ, ν, che avranno per coseni

$$\cos\lambda = \frac{\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + I\right)}{k}, \quad \cos\mu = \frac{\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + I'\right)}{k}$$

$$\cos\nu = \frac{\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2z}{d^2s} + I''\right)}{k}$$

e che saranno incluse nelle tre frazioni simmetriche

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{d^2x}{ds^2} + I} = \frac{\cos\mu}{\frac{d^2y}{ds^2} + I'} = \frac{\cos\nu}{\frac{d^2z}{ds^2} + I''}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} + I\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} + I'\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} + I''\right)^2}}$$

Facendo ora convergere k verso il limite zero, convergeranno verso il medesimo limite la i, e le I, I', I'', e perciò

$$\lim \frac{i^2}{2k} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}$$

ed insieme

$$\frac{\cos\lambda}{d^2x} = \frac{\cos\mu}{d^2y} = \frac{\cos\nu}{d^2z} \pm \frac{1}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}$$

Queste ultime equazioni determinano evidentemente l'inclinazione della normale principale, e la prima formola si riduce al raggio di curvatura ρ. Quindi è facile il dedurre che convergendo la i verso lo zero, la retta k che unisce i due punti in proposito presi sulla tangente, e sulla curva convergerà verso la direzione della normale principale, sulla quale il raggio di curvatura si trova espresso per il limite

$$\rho = \lim \frac{i^2}{2k}$$

Questa proprietà era stata di già osservata per le curve piane.

215.° Se come già abbiamo fatto nel parag. 190 la curva si riduca ad un *Elica* di equazione

$$x = R\cos p\,,\qquad y = R\,\mathrm{sen}\,p\,,\qquad z = aRp$$

avremo

$$dx = -R\,\mathrm{sen}\,p\,dp\,,\quad dy = R\cos p\,dp,\quad dz = aR\,dp$$

d'onde

$$ds = R\,dp\sqrt{1 + a^2}$$

Supponendo ora ds costante, sarà simultaneamente

$$d^2s = 0 \ , \qquad d^2p = 0 \ , \quad d^2z = 0$$

e perciò

$$d^2x = -R \cos p \, dp^2 \ , \qquad d^2y = -R \,\text{sen}\, p \, dp^2$$

Con questi valori la penultima espressione del raggio di curvatura ρ del parag. 208 diverrà

$$\rho = R(1 + a^2)$$

Per l'inclinazione della curva γ della curva all'asse delle z si trova

$$\cos \gamma = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$$

d'onde

$$\rho = \frac{R}{\text{sen}^2\gamma}$$

Cioè il raggio di Curvatura in un punto qualunque dell'Elica è sempre costante: questa proprietà rimarcabile fa riguardare l'Elica rispetto alle curve a doppia curvatura, come il circolo alle curve piane. Non solo il raggio ρ della prima curvatura è costante nell'Elica, ma ben anche il raggio R_1 della seconda curvatura, e che potremo chiamare raggio di *flessione*. Infatti ritenendo che L, M, N sieno gli angoli che una retta perpendicolare al piano osculatore fa con i tre assi ortogonali avremo per quanto si è trovato verso la fine del paragrafo 191 per l'Elica

$$\cos L = \text{sen}\, p \cos \gamma \ , \quad \cos M = -\cos p \cos \gamma \ , \quad \cos N = \text{sen}\, \gamma$$

quindi

$$d \cos L = \cos p \cos \gamma \, dp, \ d \cos M = \text{sen}\, p \cos \gamma, \ d \cos N = 0$$

e perciò l'ultima formola del parag. 207 porgerà per il raggio di flessione

$$R_1 = \frac{R}{\operatorname{sen}\gamma \cos\gamma} = 2\,R \operatorname{cosec} 2\gamma = \frac{R(1+a^2)}{a}$$

e che per il valore del raggio di Curvatura ρ si ridurrà ad

$$R_1 = \rho \tan\gamma = \frac{\rho}{a}$$

Cioè il raggio di flessione dell'Elica è eguale al prodotto del raggio di curvatura per la tangente trigonometrica d'inclinazione formata dalla retta toccante la curva con la generatrice del cilindro. Questo valor costante del raggio di flessione fa enunciare una proposizione generale per tutte quelle curve, le quali sieno in un contatto di secondo ordine con una Elica nei respettivi loro punti: infatti chiamando h il passo dell'Elica, e π il rapporto della circonferenza al diametro, noi avremo per il raggio di flessione

$$R_1 = \frac{\rho}{a} = \frac{2\pi\,R\,\rho}{2\pi\,R\,a} = \frac{2\pi\,R\,\rho}{h}$$

Supponendo che una curva tracciata nello spazio abbia comune con una data Elica il raggio ρ del circolo osculatore in un suo punto, si potrà allora determinare il raggio R del cilindro sul quale deve essere descritta, ed il passo h: sotto queste condizioni potremo dire che in una curva qualunque il raggio di flessione è una quarta proporzionale geometrica dopo la circonferenza $2\pi R$, il raggio di curvatura ρ, ed il passo h dell'Elica, che tocca la curva in un dato punto alla propria curvatura. Questo risultato coincide con quanto dice il sig. *Olivier* in una Memoria di Geometria descrittiva inserita nel 24 Cah. del giornale della scuola politecnica.

Sul luogo geometrico dei centri di curvatura di una curva data. Sopra le sviluppate di una curva qualunque, e sulle superficie che è il luogo di queste sviluppate. Centro di Curvatura sferica.

216.° Determinata la posizione del centro di curvatura per mezzo delle tre coordinate X, Y, Z come già si è fatto nel parag. 211, veniamo a conoscere la natura della linea formata dai respettivi centri di tutti i punti della curva data. Ritenendo che x, y, z sieno le coordinate di un punto qualunque della curva data, è evidente che al variare di queste, varieranno ancora le coordinate X, Y, Z del centro di curvatura, cioè immaginando che il punto (x, y, z) si muova in un modo continuo sulla curva data, il centro (X, Y, Z) descriverà una nuova curva, la quale rappresenterà il luogo geometrico dei respettivi centri di curvatura, e per conseguenza una variazione delle X, Y, Z includerà ancora una variazione nel raggio ρ.

Ciò posto per conoscere le differenti proprietà della linea dei centri riprendiamo le formole

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2+2(X-x)(Y-y)\cos\varepsilon$$

$$+2(X-x)(Z-z)\cos\varepsilon'+2(Y-y)(Z-z)\cos\varepsilon''=\rho^2$$

$$(X-x)\,d\xi+(Y-y)\,d\eta+(Z-z)\,d\zeta=0$$

la seconda delle quali appartiene al piano normale, e

Differenziandole completamente si avrà

$$(X-x)(dX-dx)+(Y-y)(dY-dy)+(Z-z)(dZ-dz)$$
$$+\Big((X-x)(dY-dy)+(Y-y)(dX-dx)\Big)\cos\varepsilon$$
$$+\Big((X-x)(dZ-dz)+(Z-z)(dX-dx)\Big)\cos\varepsilon'$$
$$+\Big((Y-y)(dZ-dz)+(Z-z)(dY-dy)\Big)\cos\varepsilon''=\rho\, d\rho$$

$$(X-x)\,d^2\xi+(Y-y)\,d^2\eta+(Z-z)\,d^2\zeta$$
$$+(dX-dx)\,d\xi+(dY-dy)\,d\eta+(dZ-dz)\,d\zeta=o$$

La prima di queste equazioni in forza dell' equazione stessa del piano normale, e la seconda per una delle formole stabilite al parag. 212 si ridurranno ad

$$(X-x)\,dX+\Big((Y-y)\,dX+(X-x)\,dY\Big)\cos\varepsilon$$
$$+(Y-y)\,dY+\Big((Z-z)\,dX+(X-x)\,dZ\Big)\cos\varepsilon'$$
$$+(Z-z)\,dZ+\Big((Y-y)\,dZ+(Z-z)\,dY\Big)\cos\varepsilon''=\rho d\rho$$

$$dX\,d\xi+dY\,d\eta+dZ\,d\zeta=o$$

Da quest' ultima formola deduciamo, che la retta tangente alla curva data nel punto (x, y, z), e la tangente alla linea dei centri nel punto (X, Y, Z) s'incontrano ad angolo retto; infatti è noto che ritenendo per s l'arco compreso fra un punto fisso, ed il punto (x, y, z), come chiamando S l'arco della linea dei centri compreso egualmente fra un punto fisso ed il punto (X, Y, Z) si avrà per la determinazione dell' angolo m delle due

tangenti le curve nei punti (x, y, z) (X, Y, Z)

$$\cos m = \frac{dx}{ds}\frac{dX}{dS} + \frac{dy}{ds}\frac{dY}{dS} + \frac{dz}{ds}\frac{dZ}{dS}$$

$$+ \left(\frac{dx}{ds}\frac{dY}{dS} + \frac{dy}{ds}\frac{dX}{dS}\right)\cos \varepsilon$$

$$+ \left(\frac{dx}{ds}\frac{dZ}{dS} + \frac{dz}{ds}\frac{dX}{dS}\right)\cos \varepsilon' + \left(\frac{dy}{ds}\frac{dZ}{dS} + \frac{dz}{ds}\frac{dY}{dS}\right)\cos \varepsilon''$$

ove facendo la sostituzione dei noti valori di ξ, η, ζ, si ridurrà ad

$$\cos m = \frac{dX}{dS}\frac{d\xi}{ds} + \frac{dY}{dS}\frac{d\eta}{ds} + \frac{dZ}{dS}\frac{d\zeta}{ds}$$

Quest'espressione si riduce a zero egualmente che il numeratore per $m=90$. La nuova retta tangente alla linea dei centri nel punto (X, Y, Z) sarà compresa nel piano normale, formando con il raggio di curvatura un certo angolo del quale ne determineremo la sua espressione analitica. L'inclinazioni del raggio di curvatura con i tre assi coordinati, sono date dalle funzioni trigonometriche a_1, b_1, c_1 ... cioè

$$a_1 = \frac{X - x}{\rho}, \quad b_1 = \frac{Y - y}{\rho}, \quad c_1 = \frac{Z - z}{\rho}$$

come per le inclinazioni della tangente alla linea dei centri, avremo le funzioni trigonometriche a', b', c' per le quali sussiste

$$a' = \frac{dX}{dS}, \quad b' = \frac{dY}{dS}, \quad c' = \frac{dZ}{dS}$$

e perciò per il coseno dell'angolo θ in questione si avrà

$$\cos\theta = a_1 a' + b_1 b' + c_1 c' + (a_1 b' + a' b_1)\cos\varepsilon$$
$$+ (a_1 c' + a' c_1)\cos\varepsilon' + (b_1 c' + b' c_1)\cos\varepsilon''$$

Facendo la sostituzione degli indicati valori si troverà in forza il valore di $\rho\, d\rho$ la nuova espressione

$$\cos\theta = \frac{d\rho}{dS}$$

Cioè il rapporto del differenziale del raggio di curvatura al differenziale dell' arco della linea dei centri è eguale al coseno dell'angolo che fra di loro contengono la normale principale, e la tangente alla linea dei centri. Nelle curve piane $d\rho = \pm dS$, e questo rapporto si ridurrà a, ± 1, ma nelle curve a doppia curvatura ottiene in generale un valore differente dall'unità. Questa differenza, che esiste fra la linea dei centri di una curva piana, e di una curva a doppia curvatura, fa sì che l'indicata linea non potrà essere una evoluta della curva proposta, come accade nelle curve piane.

217.° In una Elica delle più volte riferite equazioni, troveremo per le formole stabilite al parag. 211

$$X - x = - R\,(1 + a^2)\cos p\,,\quad Y - y = - R\,(1 + a^2)\,\text{sen}\,p$$

$$Z - z = 0$$

ossia

$$X = - Ra^2 \cos p\,,\quad Y = - R\,a^2\,\text{sen}\,p\,,\quad Z = a\,R\,p$$

Queste equazioni rappresentano evidentemente una nuova Elica nella quale il raggio R' del cilindro sarà

$$R' = - Ra^2$$

e facendo $a_1 = -\frac{1}{a}$, diverranno

$$X = R' \cos p\,, \quad Y = R' \operatorname{sen} p\,, \quad Z = a_1 R' p$$

Eliminando l'angolo p, si otterrà

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tang}\left(\frac{Z}{a_1 R'}\right)$$

la quale appartiene ad una superficie *Elicoide* che comprende la nuova Elica ed è tracciata in un cilindro retto che ha per base nel piano delle xy un circolo di raggio a^2R. Questa conseguenza si potea ancora dedurre dall'osservare che il raggio di curvatura

$$\rho = R(1 + a^2)$$

è parallelo al piano delle xy, e trovasi nella direzione della generatrice dell'Elicoide, e perciò a partir dall'asse del cilindro converrà portar nella direzione della generatrice una lunghezza $\rho - R = a^2R$.

218.° La teoria delle evolventi, e delle evolute delle curve a doppia curvatura si stabilisce in un modo simile a quello di già praticato per le curve piane. Se un filo inestensibile di una lunghezza data sia fisso per una delle sue estremità in un punto di una data curva, e che questo filo applicato da principio sulla tangente condotta alla curva per il punto di cui si tratta, venga a muoversi rimanendo sempre teso, in modo che una parte si rotoli sull'arco racchiuso fra il punto fisso, ed il punto variabile (x, y, z). L'altra parte che rimarrà retta e toccherà la curva al punto (x, y, z) terminerà con un punto mobile, che verrà a descrivere una nuova curva. Questa seconda curva si chiamerà una *evolvente* della prima, come la prima si dirà una *evoluta* della seconda. Se si chiamino X, Y, Z le coordinate di un punto

della evolvente, che corrisponde ad un punto (x, y, z) della evoluta, ed r la distanza fra i due punti, avremo

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}=\pm\frac{r}{ds}$$

Il segno $+$ avrà luogo quando la distanza r sarà computata dal punto (x, y, z) della evoluta sopra la tangente prolungata nella medesima direzione dell'arco s, ed il segno $-$ si dovrà prendere per il caso opposto. Chiamando c una data costante, si avrà per il primo caso

$$r+s=c\ , \qquad dr=-ds$$

e per il secondo

$$r-s=c\ , \qquad dr=ds$$

e perciò in ambedue l'ipotesi sussisterà

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}=-\frac{r}{dr}$$

dalle quali

$$X-x=-\frac{r\,dx}{dr}\ ,\ Y-y=-\frac{r\,dy}{dr}\ ,\ Z-z=-\frac{r\,dz}{dr}$$

e differenziando si ricaverà con facilità

$$dX=-r\,d\left(\frac{dx}{dr}\right),\ dY=-r\,d\left(\frac{dy}{dr}\right),\ dZ=-r\,d\left(\frac{dz}{dr}\right)$$

Siccome poi dalla formola

$$dr^2=ds^2=dx^2+dy^2+dz^2+2dx\,dy\cos\varepsilon$$
$$+2dx\,dz\cos\varepsilon'+2dy\,dz\cos\varepsilon''$$

ricaviamo non solamente

$$\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+\left(\frac{dy}{dr}\right)^2+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2+2\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dr}\cos\varepsilon+2\frac{dx}{dr}\frac{dz}{dr}\cos\varepsilon'$$

$$+2\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dr}\cos\varepsilon''=1$$

ma ben anche dalla derivazione

$$\frac{dx}{dr}\,d\left(\frac{dx}{dr}\right)+\frac{dy}{dr}\,d\left(\frac{dy}{dr}\right)+\frac{dz}{dr}\,d\left(\frac{dz}{dr}\right)$$

$$+\left(\frac{dy}{dr}\,d\left(\frac{dx}{dr}\right)+\frac{dx}{dr}\,d\left(\frac{dy}{dr}\right)\right)\cos\varepsilon$$

$$+\left(\frac{dz}{dr}\,d\left(\frac{dx}{dr}\right)+\frac{dx}{dr}\,d\left(\frac{dz}{dr}\right)\right)\cos\varepsilon'$$

$$+\left(\frac{dy}{dr}\,d\left(\frac{dz}{dr}\right)+\frac{dz}{dr}\,d\left(\frac{dy}{dr}\right)\right)\cos\varepsilon''=o$$

ed anche per i noti valori delle ξ, η, ζ in funzione delle x, y, z, si avrà

$$\frac{d\xi}{dr}\,d\left(\frac{dx}{dr}\right)+\frac{d\eta}{dr}\,d\left(\frac{dy}{dr}\right)+\frac{d\zeta}{dr}\,d\left(\frac{dz}{dr}\right)=o$$

Così se i valori di dX, dY, dZ si moltiplichino respettivamente per $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ e si sommino, otterremo

$$d\xi\, dX+d\eta\, dY+d\zeta\, dZ=o$$

Da questa formola ricaviamo, che le tangenti condotte per i punti (X, Y, Z), (x, y, z) alla evoluta, ed alla evolvente s'incontrano ad angolo retto, e perciò la tangente alla curva evoluta è sempre perpendicolare alla

curva evolvente. Per ottenere l'equazioni della curva evolvente, quando sia nota la curva evoluta, converrà nella formola

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}=-\frac{r}{dr}$$

sostituire i valori delle x, y, z in funzione dell'arco s, quindi sostituire $c \mp s$ in luogo della r, ed infine eliminare l'arco s fra le stesse formole; in questa guisa risulteranno due equazioni fra le tre incognite X, Y, Z, le quali apparterranno alla curva evolvente.

219.° Dallo svolgimento di una data curva non si può ottenere che una sola, e nuova curva; ma all'opposto una curva qualunque può provenire dallo svolgimento d'infinite curve, od in altri termini lo svolgimento di più curve potrebbe produrre la medesima curva. Ciò posto supponendo cognita la curva evolvente, o volendosi la evoluta di questa, chiameremo x, y, z le coordinate di un punto della evolvente, corrispondente ad un punto (X, Y, Z) della evoluta, e riterremo r per denotare la distanza fra i due punti. Sotto queste denominazioni l'ultima formola dell'antecedente parag. diverrà

$$\frac{x-X}{dX}=\frac{y-Y}{dY}=\frac{z-Z}{dZ}=-\frac{r}{dr}$$

dalle quali

$$dX=(X-x)\frac{dr}{r},\ dY=(Y-y)\frac{dr}{r},\ dZ=(Z-z)\frac{dr}{r}$$

Per la distanza r, si avrà

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2+2(X-x)(Y-y)\cos\varepsilon$$
$$+2(X-x)(Z-z)\cos\varepsilon'+2(Y-y)(Z-z)\cos\varepsilon''=r^2$$

la quale differenziata, ed avvertendo che dai valori di dX, dY, dZ si ricava

$$(X_1 - \xi)\, dX + (Y_1 - \eta)\, dY + (Z_1 - \zeta)\, dZ = r\, d\, r$$

così verificherà

$$(X - x)\, d\xi + (Y - y)\, d\eta + (Z - z)\, d\zeta = o$$

Le X_1, Y_1, Z_1 hanno il noto significato con le X, Y, Z come dal parag. 135. Proseguendo la differenziazione, si ha primieramente

$$(X - x)\, d^2\xi + (Y - y)\, d^2\eta + (Z - z)\, d^2\zeta$$
$$+ (dX - dx)\, d\xi + (dY - dy)\, d\eta + (dZ - dz)\, d\zeta = o$$

quindi avvertendo alle due formole

$$dX\, d\xi + dY\, d\eta + dZ\, d\zeta = o$$

$$ds^2 = dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta$$

verrà

$$(X - x)\, d^2\xi + (Y - y)\, d^2\eta + (Z - z)\, d^2\zeta = ds^2$$

Per una nuova differenziazione considerando l' arco s come variabile indipendente si trova

$$(X - x)\, d^3\xi + (Y - y)\, d^3\eta + (Z - z)\, d^3\zeta$$
$$+ (dX - dx)\, d^2\xi + (dY - dy)\, d^2\eta + (dZ - dz)\, d^2\zeta = o$$

Sostituendoci ora i valori di dX, dY, dZ ed osservando che per l'indipendenza della variabile s

$$dx\, d^2\xi + dy\, d^2\eta + dz\, d^2\zeta = o$$

si trasformerà in

$$(X - x)\, d\,(r\, d^2\xi) + (Y - y)\, d\,(r\, d^2\eta) + (Z - z)\, d\,(r\, d^2\zeta) = o$$

e perciò simultaneamente al valore di r^2 risulteranno le tre equazioni

$$(X - x)\, d\xi + (Y - y)\, d\eta + (Z - z)\, d\zeta = o$$

$$(X - x)\, d^2\xi + (Y - y)\, d^2\eta + (Z - z)\, d^2\zeta = ds^2$$

$$(X - x)\, d\,(rd^2\xi) + (Y - y)\, d\,(rd^2\eta) + (Z - z)\, d\,(rd^2\zeta) = o$$

Se per brevità si ponga

$$a = d\,(r\, d^2\xi)\ ,\quad b = d\,(r\, d^2\eta)\ ,\quad c = d\,(r\, d^2\zeta)$$

ed insieme

$$A = c\, d\eta - b\, d\zeta,\quad B = a\, d\zeta - c\, d\xi,\quad C = b\, d\xi - a\, d\eta$$

avremo dall'eliminazione delle differenze $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ fra la prima, e la terza, unitamente alla seconda

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C} = \frac{ds^2}{A\, d^2\xi + B\, d^2\eta + C\, d^2\zeta}$$

Inoltre dalle medesime equazioni ricaviamo

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}$$

$$= \pm \frac{r}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + 2AB \cos \varepsilon + 2AC \cos \varepsilon' + 2BC \cos \varepsilon''}}$$

Rovesciando ora queste due ultime frazioni, elevando al quadrato, e ponendo per brevità

$$A_1 = d^2\eta\, d^3\zeta - d^2\zeta\, d^3\eta$$

$$B_1 = d^2\zeta\, d^3\xi - d^2\xi\, d^3\zeta$$

$$C_1 = d^2\xi\, d^3\eta - d^2\eta\, d^3\xi$$

si troverà

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2 + 2AB\cos\varepsilon + 2AC\cos\varepsilon' + 2BC\cos\varepsilon''}{r^2}$$

$$= \frac{r^2}{ds^4}\,(A_1\,d\xi + B_1\,d\eta + C_1\,d\zeta)^2$$

Se si eseguiscano tutti i sviluppi indicati dopo la sostituzione dei valori di a, b, c si giungerà ad un' equazione differenziale del primo ordine non lineare fra le due variabili r, s, delle quali s sia l'indipendente. Per semplificare le operazioni analitiche supponiamo gli assi ortogonali, ciò che porta

$$\xi = x, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = z$$

e facciasi per le derivate

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad x'' = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad x''' = \frac{d^3x}{ds^3}, \quad y' = \ldots.$$

otterremo

$$(x''^2 + y''^2 + z''^2)\frac{dr^2}{ds^2} + (x''x''' + y''y''' + z''z''')\,r\frac{dr}{ds}$$

$$+ \left(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - (x'x''' + y'y''' + z'z''')^2\right) r^2$$

$$= \left(x'(y''z''' - z''y''') + y'(z''x''' - x''z''') + z'(x''y''' - y''x''')\right)^2 r^4$$

Da questa equazione risulta, che r è una funzione dell' arco s, e sarà un'equazione differenziale del primo ordine fra r, ed s, alla quale si può soddisfare sostituendo invece della r un'infinità di funzioni della s, corrispondenti ai diversi valori di una costante arbitraria. Supponiamo per fissar le idee che sia determinata una di queste funzioni della s, atta a rappresentare un va-

lore della r, allora eliminando l'arco s fra le tre equazioni

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z) = r^2$$

$$(X - x)\, dx + (Y - y)\, dy + (Z - z)\, dz = o$$

$$(X - x)\, d^2x + (Y - y)\, d^2y + (Z - z)\, d^2z = ds^2$$

otterremo un'evoluta della curva, alla quale appartengono le coordinate x, y, z; di qui ne segue che la medesima curva avrà un infinità di evolute per tutti i differenti valori della r, corrispondenti ai diversi valori della costante arbitraria; infine eliminando l' arco s fra le due ultime equazioni si ricaverà fra le X, Y, Z un' equazione la quale rappresenterà una superficie curva, luogo di tutte le evolute.

320.° Per scuoprire la natura di questa superficie riprendiamo le due equazioni

$$(X - x)\, dx + (Y - y)\, dy + (Z - z)\, dz = o$$

$$(X - x)\, d^2x + (Y - y)\, d^2y + (Z - z)\, d^2z = ds^2$$

che rappresentano la superficie in questione; ed osserveremo che la prima di queste equazioni appartiene al piano normale condotto per il punto (x, y, z) alla curva proposta, e la seconda appartiene al piano normale consecutivo, e perciò l'intersezione di questi due piani sarà una retta che trovasi situata tutta intera nella superficie, e per conseguenza ai differenti valori dell' arco s corrisponderà un' infinità di rette tutte comprese nella superficie, dunque la superficie è di quelle che si chiamano *superficie rigate*. Per sapere poi se questa superficie sia sviluppabile, converrà esaminare le proprietà della linea, la quale si genera dall'intersezione di tre piani normali consecutivi; differenziando infatti l'equazione

$$(X - x)\, d^2\xi + (Y - y)\, d^2\eta + (Z - z)\, d^2\zeta = ds^2$$

la quale sussiste in qualunque sistema di assi rettilinei

avremo le tre equazioni

$$(X-x)\,d\xi+(Y-y)\,d\eta+(Z-z)\,d\zeta=0$$
$$(X-x)\,d^2\xi+(Y-y)\,d^2\eta+(Z-z)\,d^2\zeta-ds^2=0$$
$$(X-x)\,d^3\xi+(Y-y)\,d^3\eta+(Z-z)\,d^3\zeta-3ds\,d^2s=0$$

dalle quali si determina il punto (X, Y, Z) intersezione di tre piani normali consecutivi; eliminando poi le x, y, z considerate o come funzioni dell' arco s, o come funzioni di un'altra variabile otterremo due equazioni fra le tre variabili X, Y, Z, le quali rappresenteranno la linea prodotta dall' intersezione successiva di tre piani normali consecutivi. Il punto (X, Y, Z) relativamente ad un punto (x, y, z) della curva proposta è ciò che chiamasi in particolare *Centro di curvatura sferica*, e del quale ne parleremo in appresso. È facile adesso il provare che la superficie rigata in proposito risulta dal luogo geometrico di tutte le tangenti la curva nei diversi punti (X, Y, Z), ossia questa superficie è sviluppabile avente per *linea di regresso* la curva prodotta dall'intersezione successiva di tre piani normali consecutivi; prendiamo pertanto tre punti infinitamente vicini, e consecutivi ad (X, Y, Z), ovvero differenziando le prime due delle ultime equazioni considerando sì le x, y, z come le X, Y, Z variabili, otterremo

$$(dX-dx)\,d\xi+(dY-dy)\,d\eta+(dZ-dz)\,d\zeta$$
$$+(X-x)\,d^2\xi+(Y-y)\,d^2\eta+(Z-z)\,d^2\zeta=0$$
$$(dX-dx)\,d^2\xi+(dY-dy)\,d^2\eta+(dZ-dz)\,d^2\zeta-2ds\,d^2s$$
$$+(X-x)\,d^3\xi+(Y-y)\,d^3\eta+(Z-z)\,d^3\zeta=0$$

le quali per le tre ultime antecedenti si ridurranno ad

$$dX\,d\xi+dY\,d\eta+dZ\,d\zeta=0$$
$$dX\,d^2\xi+dY\,d^2\eta+dZ\,d^2\zeta=0$$

Differenziando di nuovo la prima di queste equazioni sarà

$$d^2X\,d\xi + d^2Y\,d\eta + d^2Z\,d\zeta + dX\,d^2\xi + dY\,d^2\eta + dZ\,d^2\zeta = o$$

quindi si otterranno le tre equazioni simultanee

$$dX\,d\xi + dY\,d\eta + dZ\,d\zeta = o$$

$$dX\,d^2\xi + dY\,d^2\eta + dZ\,d^2\zeta = o$$

$$d^2X\,d\xi + d^2Y\,d\eta + d^2Z\,d\zeta = o$$

Dalla prima, e dall'ultima deduciamo per l'eliminazione

$$\frac{d\xi}{dY\,d^2Z - dZ\,d^2Y} = \frac{d\eta}{dZ\,d^2X - dX\,d^2Z} = \frac{d\zeta}{dX\,d^2Y - dY\,d^2X}$$

Con questi valori ai quali devono soddisfare i differenziali $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, l'equazione del piano normale

$$(X - x)\,d\xi + (Y - y)\,d\eta + (Z - z)\,d\zeta = o$$

si trasformerà in

$$(X - x)(dY\,d^2Z - dZ\,d^2Y) + (Y - y)(dZ\,d^2X - dX\,d^2Z)$$
$$+ (Z - z)(dX\,d^2Y - dY\,d^2X) = o$$

Questa equazione rappresenta un piano osculatore condotto per il punto (X , Y , Z) della curva, o ciò che torna lo stesso il piano normale nel punto (x, y, z) alla linea proposta coincide con il piano osculatore la curva nel punto (X, Y, Z), quindi ciascun piano normale alla curva tocca la superficie rigata in tutti i punti della generatrice per cui passa, ovvero le generatrici di questa superficie coincideranno con le rette tangenti alla curva formata dalla successiva intersezione di tre piani normali consecutivi : od in altri termini la superficie in questione è il luogo geometrico di tutte le tangenti alla

curva indicata, dunque la superficie è del genere delle sviluppabili, della quale la sua linea di regresso è determinata dall'intersezione di tre piani normali consecutivi alla linea in proposito.

221.° Oltre le stabilite relazioni fra i differenziali di primo ordine $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, ed i differenziali del secondo ordine d^2X, d^2Y, d^2Z, se ne deduce un'altra, la quale proviene dalla combinazione della prima, e della seconda. Si sostituiscano i noti valori di ξ, η, ζ in funzione di x, y, z nella prima, e nella seconda, e raccogliendo i termini moltiplicati per dx, dy, dz e per d^2x, d^2y, d^2z, sarà col richiamare il significato di X_1, Y_1, Z_1

$$dX_1 \, dx + dY_1 \, dy + dZ_1 \, dz = o$$

$$dX_1 \, d^2x + dY_1 \, d^2y + dZ_1 \, d^2z = o$$

dalle quali si ricava

$$\frac{dX_1}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{dY_1}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{dZ_1}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

Inoltre l'equazione del piano normale la linea di regresso nel punto X, Y, Z è

$$(X - x)\,dX_1 + (Y - y)\,dX_1 + (Z - z)\,dZ_1$$

d'onde per la sostituzione di dX, dY, dZ, otterremo

$$(X - x)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (Y - y)(dz\,d^2x - dx\,d^2z)$$
$$+ (Z - z)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = o$$

Da questa equazione deduciamo che il piano normale la linea di regresso è parallela al piano osculatore la linea data nel punto (x, y, z), mentre in generale il piano osculatore incontrerà la linea di regresso in un punto

diverso da X, Y, Z; quantunque in qualche caso particolare possa succedere che il piano osculatore dell'una coincida con il piano normale dell'altra e viceversa; in tutti i casi però l'angolo di contingenza dell'una è eguale all'angolo di flessione dell' altra , e viceversa. È facile inoltre di calcolare la distanza P del punto (x, y, z) della curva proposta dal piano normale alla linea di regresso nel punto (X, Y, Z), e che si ridurrà a trovare la perpendicolare abbassata dal punto (x, y, z) sulla direzione del piano normale alla linea di regresso nel punto (X, Y, Z). Difatti chiamando (X', Y', Z') le coordinate di un punto qualunque di questo piano normale, sarà la sua equazione nel sistema degli assi ortogonali

$$(X'-X)\,dX+(Y'-Y)\,dY+(Z'-Z)\,dZ=0$$

la quale si potrà scrivere sotto la forma

$$X'dX+Y'dY+Z'dZ-(XdX+YdY+ZdZ)=0$$

quindi la perpendicolare abbassata dal punto (x, y, z) su questo piano sarà

$$P=\frac{x dX+y dY+z dZ-(XdX+YdY+ZdZ)}{\sqrt{dX^2+dY^2+dZ^2}}$$

Infine chiamando α_1, β_1, γ_1 gli angoli che la retta tangente la linea di regresso nel punto (X, Y, Z) formano gli assi, avremo

$$P=(x-X)\cos\alpha_1+(y-Y)\cos\beta_1+(z-Z)\cos\gamma_1$$

Noi qui faremo un'osservazione importante : le due prime equazioni simultanee del parag. 220 le quali rappresentano la superficie sviluppabile sono verificate ancora dalle coordinate X , Y , Z del centro del circolo osculatore la curva nel punto (x, y, z), e per conseguenza la *linea dei centri* dei circoli osculatori trovasi

nella superficie sviluppabile: noi vedremo che in alcune circostanze la linea dei centri di curvatura si confonde con la linea di regresso della superficie sviluppabile.

222.° Riprendiamo ora le tre equazioni

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0$$

$$(X-x)\,d^2x+(Y-y)\,d^2y+(Z-z)\,d^2z-ds^2=0$$

$$(X-x)\,d^3x+(Y-y)\,d^3y+(Z-z)\,d^3z-3ds\,d^2s=0$$

le quali determinano un punto qualunque della linea di regresso; l'espressioni $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, saranno le differenze delle coordinate di un punto di una superficie sferica col centro nel punto (X, Y, Z), e che avrà quattro punti comuni infinitamente vicini con la linea proposta, quindi ne viene che il punto (X, Y, Z) si chiama *Centro di Curvatura sferica* rapporto al punto (x, y, z) e perciò ricavando per via dell'eliminazione i valori delle tre differenze delle coordinate, sarà

$$X-x=\frac{ds^2(dz\,d^3y-dy\,d^3z)+3ds\,d^2s\,(dy\,d^2z-dz\,d^2y)}{dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)+dy(d^3xd^2z-d^2xd^3z)+dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)}$$

$$Y-y=\frac{ds^2(dx\,d^3z-dz\,d^3x)+3ds\,d^2s\,(dz\,d^2x-dx\,d^2z)}{dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)+dy(d^3xd^2z-d^2xd^3z)+dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)}$$

$$Z-z=\frac{ds^2(dy\,d^3x-dx\,d^3y)+3ds\,d^2s\,(dx\,d^2y-dy\,d^2x)}{dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)+dy(d^3xd^2z-d^2xd^3z)+dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)}$$

Il raggio R_o della sfera osculatrice, è dato evidentemente dalla formola

$$R_o=\left((X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Per trovare qualcuna dell'espressioni di questo raggio;

supponiamo per maggior semplicità che l'arco s, sia la variabile indipendente, ed insieme pongasi

$$S = dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2xd^3z - d^2zd^3x) + dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x)$$

verrà

$$X - x = \frac{ds^2(dz\, d^3y - dy\, d^3z)}{S}$$

$$Y - y = \frac{ds^2(dx\, d^3z - dz\, d^3x)}{S}$$

$$Z - z = \frac{ds^2(dy\, d^3x - dx\, d^3y)}{S}$$

d'onde

$$R_0 = \frac{ds^2 \sqrt{(dzd^3y - dyd^3z)^2 + (dxd^3z - dzd^3x)^2 + (dyd^3x - dxd^3y)^2}}{S}$$

ovvero introducendoci le funzioni derivate da x, y, z come si è fatto al parag. 319 otterremo

$$R_0 = \frac{\left((z'y''' - y'z''')^2 + (x'z''' - z'x''')^2 + (y'x''' - x'y''')^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x'(y''z''' - z''y''') + y'(x''z''' - z''x''') + z'(x''y''' - y''x''')}$$

Questa espressione può subire qualche altra trasformazione qualora ci s'introducano i raggi ρ, e R_1 delle due curvature.

223.° Proseguendo le applicazioni per una Elica di equazioni

$$x = R\cos p, \qquad y = R\,\mathrm{sen}\, p, \qquad z = aRp$$

abbiamo per la considerazione dell'arco s come variabile

indipendente

$$dx = -R \operatorname{sen} p\, dp, \quad dy = R \cos p\, dp, \quad dz = aR\, dp$$

$$d^2x = -R \cos p\, dp^2, \quad d^2y = -R \operatorname{sen} p\, dp^2, \quad d^2z = o$$

$$d^3x = R \operatorname{sen} p\, dp^3, \quad d^3y = -R \cos p\, dp^3, \quad d^3z = o$$

ed insieme

$$ds^2 = R^2 (1 + a^2)\, dp^2$$

quindi le prime due equazioni del parag. 320 che rappresentano la superficie sviluppabile, luogo di tutte le evolute diverranno

$$X \operatorname{sen} p - Y \cos p = a(Z - aRp), \quad X \cos p + Y \operatorname{sen} p = -a^2R$$

L'eliminazione dell'angolo p, darà luogo ad un' equazione fra le tre coordinate X, Y, Z che apparterrà alla superficie in questione. Elevando al quadrato e sommando, verrà

$$X^2 + Y^2 = a^4 R^2 + a^2(Z - aRp)^2$$

d'onde con gran facilità

$$p = \frac{Z}{aR} \mp \left(\frac{X^2 + Y^2}{a^4 R^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

ovvero

$$p = A \mp B$$

quando per brevità pongasi

$$A = \frac{Z}{aR}, \qquad B = \left(\frac{X^2 + Y^2}{a^4 R^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sostituendo adunque il valore di p nella seconda delle due equazioni, si otterrà per la superficie sviluppabile

$$X \cos (A \mp B) + Y \operatorname{sen} (A \mp B) = -a^2R$$

Facendo i sviluppi con il primo segno verrà

$$(X\cos A + Y\,\text{sen}\,A)\cos B + a^2R = -(X\,\text{sen}\,A - Y\cos A)\,\text{sen}\,B$$

e con il secondo

$$(X\cos A + Y\,\text{sen}\,A)\cos B + a^2R = (X\,\text{sen}\,A - Y\cos A)\,\text{sen}\,B$$

Facendo di nuovo la sostituzione dei valori di A, e B comprenderemo sotto un doppio segno l'equazione della superficie sviluppabile, la quale tocca costantemente il piano normale all'Elica proposta, vale a dire

$$\left(X\cos\left(\frac{Z}{aR}\right) + Y\,\text{sen}\left(\frac{Z}{aR}\right)\right)\cos\left(\frac{X^2+Y^2}{a^4R^2}-1\right)^{\frac{1}{2}} + a^2R$$

$$= \pm\left(Y\cos\left(\frac{Z}{aR}\right) - X\,\text{sen}\left(\frac{Z}{aR}\right)\right)\text{sen}\left(\frac{X^2+Y^2}{a^4R^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

È facile ora accertarsi che la linea di regresso di questa superficie sviluppabile è un'altra Elica, la quale coinciderà ancora con la linea dei centri di curvatura dell' Elica proposta; ed infatti se alle due equazioni fra le variabili X, Y, Z, e l'angolo p si aggiunga l'altra equazione

$$(X-x)\,d^3x + (Y-y)\,d^3y + (Z-z)\,d^3z - 3ds\,d^2s = o$$

risulterà il triplo sistema

$$X\,\text{sen}\,p - Y\cos p = a\,(Z - a\,R\,p)$$

$$X\cos p + Y\,\text{sen}\,p = -a^2R\,,\quad X\,\text{sen}\,p - Y\cos p = o$$

d'onde

$$X = -a^2R\cos p,\qquad Y = -a^2R\,\text{sen}\,p,\qquad Z = a\,R\,p$$

Ognun vede che queste tre equazioni, oltre di rappre-

sentare un'Elica, sono come si scorge dal parag. 217 le coordinate dei centri di curvatura, e per conseguenza la superficie sviluppabile sarà il luogo geometrico di tutte le rette tangenti un Elica data; questa superficie si chiamerà Elicoide. Per mezzo di una formola dimostrata al parag. 221 calcoliamo la distanza P del punto (x, y, z) della curva proposta dal piano normale alla linea di regresso si troverà per l'Elica, $P = 0$; dunque il piano normale alla linea di regresso coinciderà con il piano osculatore la linea in proposito; e viceversa.

224.° L'Elicoide sviluppabile è anche il luogo di tutte le evolute dell'Elica proposta, e la ricerca di queste curve è racchiusa nelle ultime quattro formole del parag. 219; ritenendo pertanto che l'arco s sia la variabile indipendente, avremo per le funzioni derivate come dalle prime formole dell'antecedente parag.

$$x' = -\frac{\text{sen}\, p}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y' = \frac{\cos p}{\sqrt{1+a^2}}, \quad z' = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$x'' = -\frac{\cos p}{R(1+a^2)}, \quad y'' = -\frac{\text{sen}\, p}{R(1+a^2)}, \quad z'' = 0$$

$$x''' = \frac{\text{sen}\, p}{R^2\sqrt{(1+a^2)^3}}, \quad y''' = -\frac{\cos p}{R^2\sqrt{(1+a^2)^3}}, \quad z''' = 0$$

quindi si ricaverà con facilità per le nominate quattro ultime formole

$$\frac{dr^2}{dp^2} + \frac{a^2}{1+a^2} r^2 = \frac{a^2}{(1+a^2)^3} \frac{r^4}{R^2}$$

$$X^2 + Y^2 - 2R\,(X \cos p + Y \,\text{sen}\, p) + R^2 + (Z - aRp)^2 = r^2$$

$$X \,\text{sen}\, p - Y \cos p = a(Z - aRp)$$

$$X \cos p + Y \,\text{sen}\, p = -a^2 R$$

Dove le ultime due sono già occorse nella ricerca della linea di regresso. Facendo la somma dei quadrati delle due ultime troviamo

$$X^2 + Y^2 = a^4 R^2 + a^2 (Z - a R p)^2$$

d' onde la seconda per la sostituzione del valore dato dalla quarta, e da

$$(Z - a R p)^2 = \frac{X^2 + Y^2 - a^4 R^2}{a^2}$$

diverrà

$$\left(\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + R^2\right) (1 + a^2) = r^2$$

Di più se per brevità pongasi

$$t = \frac{R(1 + a^2)}{r}$$

l'equazione differenziale fra dr, e dp si trasformerà in

$$\frac{a\, dp}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

e perciò passando al valore finito concluderemo

$$\frac{ap}{\sqrt{1 + a^2}} \pm \text{arc cos}\left(\frac{R(1 + a^2)}{r}\right) = C$$

C indica una costante la quale svanisce nella differenziazione: dunque risulterà

$$r = \frac{R(1 + a^2)}{\cos\left(C - \frac{ap}{\sqrt{1 + a^2}}\right)}$$

quindi eliminando la r per mezzo di questa ultima nell'equazione fra X, Y, ed r si avrà

$$X^2 + Y^2 = a^2 R^2 \left\{ \frac{1+a^2}{\cos^2\left(C - \frac{ap}{\sqrt{1+a^2}}\right)} - 1 \right\}$$

e siccome dall'antecedente parag. si è trovato per l'angolo p

$$p = \frac{Z}{aR} \mp \left(\frac{X^2+Y^2}{a^4 R^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

così otterremo anche

$$\frac{a^2(1+a^2)R^2}{X^2+Y^2+a^2R^2} = \left\{\cos\left(C - \frac{Z}{R\sqrt{1+a^2}} \pm \frac{(X^2+Y^2-a^4R^2)^{\frac{1}{2}}}{aR\sqrt{1+a^2}}\right)\right\}^2$$

Questa equazione unitamente a quella dell'Elicoide sviluppabile determinano per ciascun valore della costante C una evoluta dell'Elica. È facile di vedere che il più piccolo valore di r corrisponde al valore della costante

$$C = \frac{ap}{\sqrt{1+a^2}}$$

In questo caso la r si riduce al raggio di curvatura $R(1+a^2)$, e perciò sotto questa condizione si ottiene l'evoluta situata sul centro di curvatura, e che corrisponde al punto dell'Elica che coincide con l'origine. Se si chiami P un angolo corrispondente ad un valore qualunque della costante C, si avrà

$$P = \frac{C\sqrt{1+a^2}}{a}$$

d'onde

$$r = \frac{R(1+a^2)}{\cos\left(\frac{a(p-P)}{\sqrt{1+a^2}}\right)}$$

e quindi

$$X^2 + Y^2 = a^2 R^2 \left\{ \frac{1 + a^2}{\cos^2\left(\frac{a(p - P)}{\sqrt{1 + a^2}}\right) - 1} \right\}$$

Infine sottraendo quest'ultima da

$$X^2 + Y^2 = a^4 R^2 + a^2 (Z - a R p)^2$$

otterremo

$$Z - a Rp = \pm (1 + a^2)^{\frac{1}{2}} R \tang\left(\frac{a(p - P)}{\sqrt{1 + a^2}}\right)$$

Ognun vede che la trovata formola porge il valore di una delle coordinate Z dell'evoluta dell'Elica in funzione dell'angolo p. In egual modo dalle formole stabilite nel principio di questo parag. si avrebbero l'espressione di X, Y in funzione di p; queste tre equazioni rappresenteranno una evoluta qualunque dell'Elica; infatti riprese le formole

$$X \operatorname{sen} p - Y \cos p = a(Z - a R p)$$

$$X \cos p + Y \operatorname{sen} p = - a^2 R$$

avremo dall'eliminazione

$$X + a^2 R \cos p = a (Z - a Rp) \operatorname{sen} p$$

$$Y + a^2 R \operatorname{sen} p = - a (Z - a R p) \cos p$$

le quali sono comprese nelle frazioni simmetriche

$$\frac{X + a^2 R \cos p}{a \operatorname{sen} p} = \frac{Y + a^2 R \operatorname{sen} p}{- a \cos p} = \frac{Z - a Rp}{1}$$

$$= \pm (1 + a^2)^{\frac{1}{2}} R \tang\left(\frac{a(p - P)}{\sqrt{1 + a^2}}\right)$$

Le coordinate X, Y, Z di un punto di una evoluta dell'Elica diverranno infinite, quando sia

$$\frac{a(p-P)}{\sqrt{1+a^2}} = \pm (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

ovvero quando l'angolo p sia determinato dalla formola

$$p = P \pm (2n+1)\frac{\pi}{2}\;\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

Osserviamo inoltre, che le coordinate X, Y, Z non cessano di verificare l'equazione dell'Elicoide sviluppabile, quando anche p converga verso l'indicato valore. Di più il punto (X, Y, Z) si accosta indefinitamente a quello rappresentato dall'equazioni delle generatrici dell'Elicoide, quando si assuma per p il detto valore; dunque ciascuna Evoluta dell'Elica risulterà di un'infinità di rami, che si estendono all'infinito, e di cui ciascun avrà per assintoto due generatrici della superficie Elicoide sviluppabile.

Facendo la projezione di una evoluta dell' Elica nel piano delle x, y, e si prendano i valori di X, Y, in coordinate polari R_1, P_1, cioè

$$X = R_1 \cos p_1, \qquad Y = R_1 \operatorname{sen} p_1$$

le formole

$$X \operatorname{sen} p - Y \cos p = a(Z - aRp)$$

$$Y \cos p + Y \operatorname{sen} p = -a^2 R$$

$$Z - aRp = \pm (1+a^2)^{\frac{1}{2}} R \operatorname{tang}\left(\frac{a(p-P}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

daranno

$$R_1 \operatorname{sen}(p-p_1) = \pm (1+a^2)^{\frac{1}{2}} R \operatorname{tang}\left(\frac{a(p-P)}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

$$R_1 \cos(p-p_1) = -a^2 R$$

Facciamo $P = o$, risulterà il sistema

$$R_1 \operatorname{sen}(p - p_1) = \pm a(1 + a^2)^{\frac{1}{2}} R \operatorname{tang}\left(\frac{ap}{\sqrt{1 + a^2}}\right)$$

$$R_1 \cos(p - p_1) = -a^2 R$$

$$Z - a R p = \pm (1 + a'^2)^{\frac{1}{2}} R \operatorname{tang}\left(\frac{ap}{\sqrt{1 + a^2}}\right)$$

Queste tre equazioni ci faranno conoscere con gran facilità qualche proprietà interessante dell'Evolute dell'Elica; infatti la supposizione di $P = o$ ci dice che le tre precedenti equazioni rappresenteranno quella delle evolute sulla quale è situato il centro di curvatura corrispondente al punto dell'Elica; che coincide con l'origine; per passare poi dalle ultime equazioni a quelle nelle quali P ritenga un valore finito basterà sostituire in luogo di

$$p\,,\quad p_1\quad o\quad Z$$

le differenze

$$p - P\,,\qquad p_1 - P\,,\qquad Z - aRP$$

allora la curva alla quale appartengono le coordinate, p_1, R_1 e Z si scosta nello spazio in modo che ciascun punto descriva attorno l'asse delle z con un movimento di rotazione diretto, o retrogrado l'angolo $\pm P$, e nello stesso tempo strisciando parallelamente a questo asse percorra la lunghezza $\pm aRP$ con un movimento diretto o retrogrado; in questa guisa dalle evolute dell' Elica rappresentate dalle ultime stabilite equazioni, si passerà ad una qualunque delle altre evolute della medesima curva; dunque tutte queste evolute son tutte curve simili fra di loro, e da potersi sovrapporre l'una sull' altra; se si prenda

$$P = \pm (2n + 1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{1 + a^2}}{a}$$

allora corrisponderanno i diversi rami della prima evoluta, e che si troveranno sovrapposti gli uni sopra gli altri in virtù di quel scostamento di sopra indicato, e perciò anche i rami di una medesima evoluta sono simili fra di loro. Queste proprietà sono simili a quella dell'Elica, che si può sovrapporre a se stessa, imprimendo simultaneamente un doppio movimento di rotazione attorno l'asse delle z, e di traslazione parallelamente a questo asse. Infine volendo determinare il raggio R_o di curvatura sferica dell' Elica avremo con gran facilità dall'ultima formola del parag. 222

$$R_o = R(1 + a^2)$$

e perciò il raggio di curvatura sferica dell'Elica coincide con il raggio del circolo osculatore la medesima curva nei suoi respettivi punti.

Sulla Curvatura, e sui raggi di Curvatura delle linee tracciate su di una data superficie.

225.° Rappresentiamo per

$$u = o$$

l' equazione generale di una superficie curva riferita a tre assi ortogonali, ove u sarà funzione delle tre coordinate (x, y, z). Se s'immagini risoluta questa equazione rapporto ad una delle variabili z, si avrà

$$z = f(x, y)$$

e nell'uno e nell'altro caso potremo immaginare un piano tangente questa medesima superficie in un determinato

punto (x, y, z); quindi se X, Y, Z sieno le coordinate generiche di un punto qualunque del piano, sarà come dal parag. 192 nella prima ipotesi

$$(X - x)\, D_x u + (Y - y)\, D_y u + (Z - z)\, D_z u = o$$

e per la seconda

$$Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - y)$$

p, q sono le derivate parziali della z rapporto ad x, ed y, cioè

$$p = D_x z\ , \qquad q = D_y z$$

Se per questo punto (x, y, z) si faccia passare un piano normale, produrrà esso una data sezione, che noi chiameremo *sezione normale*, e l'intersezione di ciascun piano normale con il piano tangente darà origine ad altrettante rette tangenti le rispettive sezioni normali nel medesimo punto (x, y, z).

Consideriamo due qualunque di queste sezioni normali, l'equazioni delle loro rette tangenti, ed esistenti nel piano tangente saranno della forma

$$X - x = m\,(Z - z)\ , \qquad Y - y = n\,(Z - z)$$

$$X_1 - x = m_1\,(Z_1 - z)\ , \qquad Y_1 - y = n_1\,(Z_1 - z)$$

I coefficienti m, m_1, n, n_1 sono eguali ai rapporti

$$\frac{dx}{dz}\,, \qquad \frac{dy}{dz}$$

i quali si ottengono dalle equazioni delle projezioni delle sezioni normali nei piani xz, yz. Che se ancora pongasi

$$\frac{n}{m} = \varphi\ , \qquad \frac{n_1}{m_1} = \psi$$

le precedenti equazioni saranno comprese nelle

$$Y - y = \varphi (X - x) , \qquad Y_1 - y = \psi (X_1 - x)$$

Qui pure se l'equazioni delle sezioni normali projettate nel piano $x\, y$ sieno

$$f(x, y) = 0 \ , \qquad F(x, y) = 0$$

i valori di φ, ψ saranno le respettive derivate

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = - \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \ , \qquad \psi = \frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

Di più trovandosi le rette tangenti nel piano tangente stesso, si dovranno verificare evidentemente le condizioni

$$1 = pm + qn \, , \qquad 1 = pm_1 + qn_1$$

D'onde avvertendo ai valori di φ, e ψ si troverà

$$m = \frac{1}{p + q\varphi} \, , \qquad n = \frac{\varphi}{p + q\varphi}$$

$$m_1 = \frac{1}{p + q\psi} \, , \qquad n_1 = \frac{\psi}{p + q\psi}$$

I coseni degli angoli α, β, γ formati dalla retta tangente una data sezione con gli assi coordinati sono determinati dalle frazioni

$$\frac{\cos\alpha}{m} = \frac{\cos\beta}{n} = \frac{\cos\gamma}{1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}$$

e che in forza dei valori di m, n, si riduranno ad

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+2pq\varphi+(1+q^2)\varphi^2}}$$

$$\cos\beta = \pm \frac{\varphi}{\sqrt{1+p^2+2pq\varphi+(1+q^2)\varphi^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{p+q\varphi}{\sqrt{1+p^2+2pq\varphi+(1+q^2)\varphi^2}}$$

e nella stessa maniera per una altra sezione avremo

$$\cos\alpha_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+2pq\psi+(1+q^2)\psi^2}}$$

$$\cos\beta_1 = \pm \frac{\psi}{\sqrt{1+p^2+2pq\psi+(1+q^2)\psi^2}}$$

$$\cos\gamma_1 = \pm \frac{p+q\psi}{\sqrt{1+p^2+2pq\psi+(1+q^2)\psi^2}}$$

Gli angoli α, β, γ, ed α_1, β_1, γ_1, sono vincolati dalle equazioni

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta, \qquad \cos\gamma_1 = p\cos\alpha_1 + q\cos\beta_1$$

le quali sono evidentemente incluse nell'equazione differenziale della superficie. Alle medesime equazioni si giunge avvertendo, che se s sia l'arco di una data sezione normale compresa fra un punto fisso, ed il punto (x, y, z), si avrà in generale

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Ora per una data sezione sussiste

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dy = \varphi\,dx$$

e perciò

$$ds = dx\sqrt{1 + p^2 + 2pq\varphi + (1 + q^2)\varphi^2}$$

D'altronde i coseni degli angoli α, β, γ, sono dati dalle formole

$$\frac{\cos a}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz} = \pm\frac{1}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

d'onde per la sostituzione otterremo i valori di già trovati.

Con egual facilità volendo calcolare l'angolo compreso fra due sezioni normali, avremo

$$\cos V = \cos a \cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$$

e quindi

$$\cos V = \frac{1 + p^2 + pq(\varphi + \psi) + (1 + q^2)\varphi\psi}{\sqrt{1 + p^2 + 2pq\varphi + (1 + q^2)\varphi^2}.\sqrt{1 + p^2 + 2pq\psi + (1 + q^2)\psi^2}}$$

Se le due sezioni s'incontrano ad angolo retto, avremo la condizione

$$1 + p^2 + pq(\varphi + \psi) + (1 + q^2)\varphi\psi = 0$$

Noi vedremo l'ultilità che presenta questa equazione di condizione per alcune particolari sezioni normali.

226.° Stabilite le precedenti considerazioni sieno x, y, z le tre coordinate ortogonali di un punto della superficie curva di equazione $u = 0$, ed ove sieno tracciate un'infinità di linee passanti per lo stesso punto. Sia s l'arco di una qualunque di queste linee compreso fra un punto fisso ed il punto (x, y, z), denotiamo per ρ_1 il suo raggio di curvatura al medesimo punto (x, y, z) e per ρ il raggio di curvatura di una sezione normale che passa per lo stesso punto, e sia infine ε l'angolo dei due raggi ρ_1, ρ. Se si prendano i differenziali del primo e second'ordine nell'equazione della

superficie, e se si supponga per esempio, che l'arco s rappresenti la variabile indipendente, noi avremo col fare

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad z' = \frac{dz}{ds}, \quad x'' = \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots$$

le due equazioni

$$x'D_x u + y'D_y u + z'D_z u = 0$$

$$x'^2 D_x^2 u + y'^2 D_y^2 u + z'^2 D_z^2 u + 2x'y'D_x D_y u + 2z'x'D_x D_z u$$
$$+ 2y'z'D_y D_z u + x''D_x u + y''D_y u + z''D_z u = 0$$

Le derivate del primo ordine x', y', z', che esprimono i coseni degli angoli α, β, γ formati dalla retta tangente al punto (x, y, z) con i tre assi ortogonali, verificano evidentemente l'equazione

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

Pongasi

$$R = \left((D_x u)^2 + (D_y u)^2 + (D_z u)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e si chiamino λ, μ, ν gli angoli formati dal raggio di curvatura ρ della sezion normale con i tre assi ortogonali, sarà

$$\cos\lambda = \pm \frac{D_x u}{R}, \quad \cos\mu = \pm \frac{D_y u}{R}, \quad \cos\nu = \pm \frac{D_z u}{R}$$

Gli angoli λ_1, μ_1, ν_1, formati dal raggio di curvatura ρ_1 con i medesimi assi, saranno come dal parag. 211

$$\cos\lambda_1 = \rho_1 x'', \quad \cos\mu_1 = \rho_1 y'', \quad \cos\nu_1 = \rho_1 z''$$

quindi per l'angolo dei due raggi ρ, ρ_1 risulterà

$$\cos\varepsilon = \pm \rho_1 \frac{x''D_x u + y''D_y u + z''D_z u}{R}$$

Per brevità si faccia

$$Q = x'^2 D_x^2 u + y'^2 D_y^2 u + z'^2 D_z^2 u + 2x'y' D_x D_y u$$
$$+ 2x'z' D_x D_z u + 2y'z' D_y D_z u$$

avremo ancora

$$\cos \varepsilon = \pm \rho_1 \frac{Q}{R}$$

La quantità R rimane invariabile per lo stesso punto della superficie, come rimarrà invariabile la Q per tutte quelle curve le quali passando per il medesimo punto abbiano la medesima retta tangente, e perciò sotto questa condizione il coefficiente di ρ_1 sarà una quantità costante; ora annullandosi l'angolo ε dei due raggi ρ_1, ρ avremo $\rho_1 = \rho$, e perciò

$$\rho = \pm \frac{R}{Q}$$

ed insieme

$$\rho_1 = \rho \cos \varepsilon$$

In questa guisa il raggio di curvatura di una qualsiasi curva tracciata sopra una superficie dipende dal raggio di curvatura di una sezione normale, la quale abbia la medesima retta tangente, e dall'angolo dei due raggi ρ, ρ_1. Se la linea di raggio ρ_1 sia piana, si dirà allora una *sezione obliqua* della superficie, ed in questo caso si otterrà il raggio di curvatura ρ_1 col projettare il raggio ρ della sezione normale sopra il piano della sezione obliqua. Tal'è una proposizione conosciuta sotto il nome del *teorema di Meusnier*.

227.° La precedente espressione del raggio di curvatura ρ, o ρ_1 si può anche presentare sotto un'altra forma, se l'equazione della superficie sia risoluta rapporto ad una delle variabili; così facendo

$$u = f(x, y) - z = 0.$$

si avrà

$$D_x u = D_x z\,, \quad D_y u = D_y z\,, \quad D_z u = -1$$

$$D_x^2 u = D_x^2 z\,, \quad D_y^2 u = D_y^2 z\,, \quad D_x D_y u = D_x D_y z$$

$$D_z^2 u = 0\,, \quad D_x D_z u = 0\,, \quad D_y D_z u = 0$$

d'onde ponendo

$$p = D_x z\,, \quad q = D_y z\,, \quad r = D_x^2 z$$

$$s = D_x D_y z\,, \quad t = D_y^2 z$$

verrà

$$\rho = \pm \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}$$

Sotto questa forma, che noi faremo principalmente uso per scuoprire diverse proprietà interessanti, delle quali godono le differenti sezioni normali: aggiungiamo che chiamando φ, la tangente trigonometrica dell'angolo formato con l'asse delle x dalla projezione della tangente nel piano xy, sarà come dal parag. 225

$$\frac{x'}{1} = \frac{y'}{\varphi} = \frac{z'}{p + q\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + 2pq\varphi + (1 + q^2)\varphi^2}}$$

d'onde

$$\rho = \pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, \frac{(1 + p^2 + 2pq\varphi + (1 + q^2)\varphi^2)}{r + 2s\varphi + t\varphi^2}$$

Infine per le coordinate X, Y, Z dal centro di curvatura, avremo l'equazioni

$$\frac{x - X}{p} = \frac{y - Y}{y} = \frac{Z - z}{-1} = \pm \frac{\rho}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

dalle quali dopo la sostituzione di una delle espressioni di ρ, si deducono i valori delle differenze $x - \mathrm{X}$, $y - \mathrm{Y}$, $z - \mathrm{Z}$. L'andamento della curvatura in un dato punto (x, y, z) della superficie, e proveniente da tutte le sezioni normali, si può rendere evidente per mezzo di una certa linea tracciata sul piano tangente: così se a partir dal punto (x, y, z) comune alla superficie ed al piano si portino sopra ciascuna retta tangente le sezioni normali delle lunghezze espresse dal valor numerico della radice quadrata del raggio ρ, allora chiamando X, Y, Z le coordinate di un punto qualunque della linea tracciata nel piano tangente, e che passa per la estremità dei respettivi $\sqrt{\rho}$, si avrà

$$\mathrm{X} - x = \rho^{\frac{1}{2}} x', \quad \mathrm{Y} - y = \rho^{\frac{1}{2}} y', \quad \mathrm{Z} - z = \rho^{\frac{1}{2}} z'$$

quindi sostituiti i valori di x', y', z', nella prima espressione di ρ, otterremo l'equazione

$$\begin{aligned} & \mathrm{D}_x^2 u\,(\mathrm{X} - x)^2 + \mathrm{D}_y^2 u\,(\mathrm{Y} - y)^2 + \mathrm{D}_z^2 u\,(\mathrm{Z} - z)^2 \\ & + 2\mathrm{D}_x \mathrm{D}_y u\,(\mathrm{X} - x)(\mathrm{Y} - y) + 2\mathrm{D}_x \mathrm{D}_z u\,(\mathrm{X} - x)(\mathrm{Z} - z) \\ & + 2\mathrm{D}_y \mathrm{D}_z u\,(\mathrm{Y} - y)(\mathrm{Z} - z) = \pm \mathrm{R} \end{aligned}$$

la quale apparterrà ad una superficie del second'ordine, quando si considerino per variabili le X, Y, Z: il centro di questa superficie trovasi nel punto (x, y, z), l'intersezione della medesima con il piano tangente produrrà una linea di secondo ordine dotata di centro nello stesso punto (x, y, z), e descritta nel piano tangente. Che se l'equazione della superficie curva sia risoluta rapporto alla z, allora si avrà per la sostituzione dei soli valori di x', y' nella penultima espressione del raggio di curvatura, la nuova equazione

$$r(\mathrm{X}-x)^2 + 2s(\mathrm{X}-x)(\mathrm{Y}-y) + t(\mathrm{Y}-y)^2 = \pm (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$$

la quale rappresenta la projezione nel piano xy della linea del secondo ordine descritta nel piano tangente: questa linea descritta nel piano xy suol chiamarsi *Curva indicatrice* della superficie come per il primo ha fatto il sig. *Dupin* (*).

228.° Mettendo a profitto le proprietà delle linee del secondo ordine si vengono a risolvere diverse interessanti questioni sulla curvatura delle superficie rapporto alle loro sezioni normali: così volendo cercare l'equazione di condizione, onde due semidiametri della curva indicatrice sieno conjugati, noi verremo a riconoscere la direzione di due particolari rette tangenti a due sezioni normali, e che potremo chiamare *tangenti*, e *sezioni conjugate.*

Sieno ξ, η le coordinate di un punto qualunque della retta tangente la curva indicatrice di secondo ordine nel punto $(X - x,\ Y - y)$ si avrà per la sua equazione

$$M(\xi - x) + N(\eta - y) = \pm (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$$

ove

$$M = r(X - x) + s(Y - y), \qquad N = t(Y - y) + s(X - x)$$

Nella stessa guisa una retta condotta dal centro, avrà per equazione

$$\eta - y = \frac{Y_1 - y}{X_1 - x}(\xi - x)$$

Le due rette saranno parallele sotto la condizione

$$(X_1 - x)\Big(s(Y - y) + r(X - x)\Big) + (Y_1 - y)\Big(t(Y - y) + s(X - x)\Big) = 0$$

quindi ponendo come già si è fatto nell' antecedente parag. 225

$$\varphi = \frac{Y - y}{X - x}, \quad \psi = \frac{Y_1 - y}{X_1 - x}$$

(*) Developpement de geometrie pag. 147.

risulterà

$$r + s(\varphi + \psi) + t\varphi\psi = 0$$

Questa relazione si chiamerà *Equazione alle tangenti conjugate.*

Una delle questioni più interessanti, ed atta a darci una idea netta della curvatura della superficie per un dato punto (x, y, z) è di ricercare fra le infinite sezioni normali che passano per lo stesso punto quelle, nelle quali i raggi di curvatura sono un massimo, od un minimo. Ora dalla determinazione degli assi principali della curva indicatrice noi potremo ottenere non solo i raggi di curvatura, massimo, e minimo, ma ben anche la direzione delle corrispondenti sezioni normali, le quali dovranno essere unite ad angolo retto, come accade negli assi principali di una linea di secondo ordine. A far ciò avvertiamo che gli assi principali di una linea di secondo ordine verificano la doppia condizione di essere perpendicolari, e conjugati: e perciò per la direzione delle tangenti le sezioni normali di massima, e minima curvatura noi avremo come da questo, e dal parag. 225 le due condizioni

$$1 + p^2 + pq(\varphi + \psi) + (1 + q^2)\varphi\psi$$

$$r + s(\varphi + \psi) + t\psi\varphi = 0$$

Eliminando da questa una qualunque delle due tangenti trigonometriche φ, e ψ si giungerà ad un equazione di secondo grado, la quale porgerà i due valori richiesti corrispondenti alle due sezioni normali che potremo chiamare *principali*; ed otterremo

$$A_1\varphi^2 + B_1\varphi + C_1 = 0$$

ove

$$A_1 = s(1 + q^2) - pqt$$

$$B_1 = r(1 + q^2) - t(1 + p^2)$$

$$C_1 = pqr - s(1 + p^2)$$

I raggi di curvatura corrispondenti alle due radici di quest'equazioni, si diranno *raggi di curvatura principale.*

229.° Alla medesima equazione di secondo grado rapporto a φ ci si può giungere dal cercare direttamente la condizione, onde il raggio ρ divenga massimo, e minimo; infatti riprendendo l'espressione

$$\rho = \pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\frac{(1 + p^2 + 2pq\varphi + (1 + q^2)\varphi^2)}{r + 2s\varphi + t\varphi^2}$$

avremo da una derivazione rapporto a φ

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \pm 2\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,\frac{\Big\{(r + 2s\varphi + t\varphi^2)\big(pq + (1+q^2)\varphi\big) - \big(1 + p^2 + 2p\varphi + (1 + q^2)\varphi^2\big)(s + t\varphi)\Big\}}{(r + 2s\varphi + t\varphi^2)^2}$$

d'onde per il massimo, o minimo avrà luogo la condizione

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 0$$

Eseguendo le indicate moltiplicazioni e raccogliendo i termini moltiplicati per le potenze seconda, prima, e nulla di φ si dovrà annullare questa somma, ciò che conduce immediatamente all'equazione di secondo grado rapporto a φ di già trovata : sarà bene qui di osservare che sostituendo i valori di A_1, B_1, C_1 nell'equazione di secondo grado rapporto a φ avremo anche per una facile decomposizione

$$\frac{r + s\varphi}{1 + p^2 + pq\varphi} = \frac{s + t\varphi}{pq + (1 + q^2)\varphi}$$

Sieno φ_1, φ_2 le radici di questa equazione è chiaro ,

che fra le due tangenti φ_1, φ_2 sussisteranno le due equazioni

$$1 + p^2 + pq(\varphi_1 + \varphi_2) + (1 + q^2)\varphi_1\varphi_2 = 0$$

$$r + s(\varphi_1 + \varphi_2) + t\varphi_1\varphi_2 = 0$$

e nello stesso tempo i raggi di curvatura principale saranno

$$\rho_1 = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\frac{(1 + p^2 + 2pq\varphi_1 + (1+q^2)\varphi_1^2)}{r + 2s\varphi_1 + t\varphi_1^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\frac{(1 + p^2 + 2pq\varphi_2 + (1+q^2)\varphi_2^2)}{r + 2s\varphi_2 + t\varphi_2^2}$$

quindi eliminando per mezzo delle due equazioni rapporto a φ_1, e φ_2 le r, ed $1 + p^2$, ed anche t, od $1+q^2$ verrà

$$\rho_1 = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\frac{(pq + (1+q^2)\varphi_1)}{s + t\varphi_1} = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\frac{(1+p^2+pq\varphi_1)}{r + s\varphi_1}$$

$$\rho_2 = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\frac{(pq + (1+q^2)\varphi_2)}{s + t\varphi_2} = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\frac{(1+p^2+pq\varphi_2)}{r + s\varphi_2}$$

d'onde per la somma, e per la moltiplicazione si ricaverà

$$\rho_1 + \rho_2 = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\frac{((1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r)}{rt - s^2}$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{rt - s^2}$$

dunque i due raggi di curvatura principale dipendono dalla risoluzione di un'equazione di secondo grado, nella quale rappresentando per ρ l'incognita comune, otterremo

$$L\rho^2 + M\rho + N = 0$$

ove

$$L = rt - s^2 , \qquad N = (1 + p^2 + q^2)^2$$

$$M = -\left(r(1+q^2) - 2s\,pq + t(1+p^2)\right)(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$$

Di più ponendo in generale

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{Q}$$

ove sia

$$Q = \frac{r + 2s\,\varphi + t\,\varphi^2}{1 + p^2 + 2pq\,\varphi + (1+q^2)\,\varphi^2}$$

avremo rapporto a Q l'equazione di secondo grado

$$L_1\,Q^2 + M_1\,Q + N_1 = 0$$

nella quale

$$L_1 = 1 + p^2 + q^2 , \qquad N_1 = rt - s^2$$

$$M_1 = -\left(r(1+q^2) - 2s\,p\,q + t(1+p^2)\right)$$

In questo modo si ha un doppio valore di Q corrispondente ai due valori di φ, e di ρ.

230.° Un importante osservazione a farsi è che i due valori di Q sono reali : ciò si potrà immediatamente scorgere per mezzo di una trasformazione di piani coordinati. Infatti nulla togliendo alla generalità supponiamo che il piano tangente sia parallelo al piano delle $x\,y$, si avrà $p = 0$, $q = 0$ d'onde i valori L_1, M_1, N_1 divengono

$$L_1 = 1 , \quad N_1 = rt - s^2 , \quad M_1 = -(r + t)$$

In questa guisa l'equazione di secondo grado

$$Q^2 - (r+t)\,Q + rt - s^2 = 0$$

darà dalla risoluzione le radici

$$Q = \frac{r+t}{2} \pm \frac{\sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}}{2}$$

ove essendo sotto il vincolo radicale una quantità essenzialmente positiva, saranno reali le due indicate radici. Questa decomposizione in quadrati della quantità sotto il vincolo radicale nell'equazione di secondo grado rapporto a Q si ottiene ancora indipendentemente della supposizione di $p = 0$, $q = 0$. Dalla medesima equazione ricaviamo che nel caso di

$$rt - s^2 > 0$$

i due valori di Q corrispondenti ai due raggi di curvatura principale godono dello stesso segno, e perciò sotto questa condizione i raggi di curvatura avranno una medesima direzione, e rappresenteranno i due valori l'uno massimo, e l'altro minimo di ρ. Quando sia

$$rt - s^2 < 0$$

i due valori di Q sono di segno contrario ed i raggi di curvatura diretti in senso opposto rappresenteranno due valori minimi di ρ. Infine nell'ipotesi di

$$rt - s^2 = 0$$

uno dei valori di Q si annulla, ed il valor massimo del raggio di curvatura diviene infinito, ciò che indica esser nulla la curvatura in una delle due sezioni normali principali. Questa circostanza ha luogo in una superficie sviluppabile per ogni suo punto.

Riprendiamo l'equazione generale di secondo grado rapporto a Q con i coefficienti L_1, M_1, N_1, e supponiamo che svanisca la quantità sotto il vincolo nell'

equazione risoluta; in questo caso i due valori di Q, ed i due valori di ρ saranno eguali: per giungere all' equazioni di condizioni, che devono aver luogo fra le derivate parziali p, q, r, s, t basterà avvertire, che il valore generico di

$$Q = \frac{r + 2s\varphi + t\varphi^2}{1 + p^2 + 2pq\varphi + (1 + q^2)\varphi^2}$$

dovrà essere indipendente dalla tangente trigonometrica φ, d'onde i respettivi coefficienti di ciascuna potenza di φ dovranno essere fra di loro nel medesimo rapporto; ciò che dà immediatamente

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}$$

nelle quali ricomponendo il numeratore, e denominatore, moltiplicando, e dividendo la seconda per φ, e la terza per φ^2 verrà ancora

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2} = Q$$

Sotto questa stessa ipotesi il doppio valore di φ dato dall'eqnazione di secondo grado diviene indeterminato. Quei particolari punti della superficie nei quali si verificano l'enunciate condizioni sono chiamati dai francesi *Ombilics.*

Infine se nella consueta equazione di secondo grado rapporto a Q si annulli il coefficiente di Q, si avrà la condizione

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0$$

i due valori di Q, come i due valori dei raggi di curvatura principale, sono eguali, e diretti in senso opposto.

231.° Dati i due raggi di curvatura principale per

un dato punto della superficie, è molto facile di determinare il raggio di curvatura di una qualunque delle sezioni normali, che passano per lo stesso punto: infatti supposto per maggior semplicità, che il piano tangente sia parallelo a quello delle $x\,y$, e che la direzione degli assi coordinati coincida con la direzione dei semiassi principali della curva *Indicatrice*, si dovrà porre primieramente nell'espressione generale

$$\rho = \pm \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r x'^2 + 2s\,x'y' + t\,y'^2}$$

$$p = 0\,,\ q = 0\,,\ s = 0\,,\ x' = \cos\alpha\,,\ y' = \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$$

ciò che darà

$$\rho = \pm \frac{1}{r\cos^2\alpha + t\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Ora per la stessa supposizione l'equazione di secondo grado rapporto a Q, e l'equazione di secondo grado rapporto a ρ per i raggi di curvatura principale daranno respettivamente

$$Q = \frac{r+t}{2} \pm \frac{r-t}{2}$$

$$\rho^2 - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{t}\right)\rho + \frac{1}{rt} = 0$$

d'onde per i raggi ρ_1, ρ_2 di curvatura principale potremo prendere in generale

$$\rho_1 = \pm \frac{1}{r}\,, \qquad \rho_2 = \pm \frac{1}{t}$$

Se dunque i raggi ρ_1, ρ_2 sono del medesimo segno in

modo da essere $rt > o$, il raggio di curvatura ρ di una sezione normale sarà

$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 \cos^2\alpha + \rho_1 \operatorname{sen}^2\alpha}$$

Che se sia $rt < o$, allora i raggi ρ_1, ρ_2 saranno di segno contrario, ed allora ricaveremo

$$\pm \rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 \cos^2\alpha - \rho_1 \operatorname{sen}^2\alpha}$$

Il segno $\pm$, deve scegliersi secondo che il raggio ρ ha la direzione medesima con ρ_1, o con ρ_2. Una qualunque delle due espressioni si trasforma anche facilmente in un equazione polare di una linea di secondo ordine, nella quale i semiassi a, b principali sieno rappresentati il primo da un medio aritmetico, ed il secondo da un medio geometrico; si sostituisca infatti in primo luogo

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

verrà

$$\rho = \frac{2\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2) - (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\alpha}$$

e si faccia in seguito

$$\rho_1 + \rho_2 = 2a, \quad \rho_1 - \rho_2 = 2c, \quad c = ae$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2}$$

d'onde

$$\rho_1 = a + c, \quad \rho_2 = a - c, \quad \rho_1 \rho_2 = b^2$$

si ricaverà

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos 2\alpha}$$

Questa espressione appartiene ad una curva di secondo ordine a coordinate polari.

232.° Quando sia data la sola equazione

$$u = 0$$

della superficie curva, e si vogliano per un qualunque punto (x, y, z) determinare i raggi di curvatura principale, e le direzioni delle tangenti alle corrispondenti sezioni normali, converrà primieramente ricercare il massimo e minimo valore della quantità

$$\rho = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2$$

A questa espressione si dovrà congiungere l' equazione del piano tangente, e della superficie del secondo ordine di già ottenuta nel parag. 226. Per maggior semplicità sopporremo che gli assi principali della nominata superficie del secondo ordine sieno paralleli agli assi coordinati, per cui oltre le due equazioni

$$\rho = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2$$

$$(X - x)\, D_x u + (Y - y)\, D_y u + (Z - z)\, D_z u = 0$$

avremo ancora

$$(X - x)^2 D_x^2 u + (Y - y)^2 D_y^2 u + (Z - z)^2 D_z^2 u = \pm R$$

ove secondo il consueto sarà

$$R = \left((D_x u)^2 + (D_y u)^2 + (D_z u)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

La quantità ρ considerata come funzione delle tre variabili X, Y, Z deve divenir massima, o minima, quando nello stesso tempo le X, Y, Z verifichino le equazioni del piano tangente, e della superficie del secondo ordine: differenziando pertanto rapporto ad X, Y, Z il

valore di ρ, e le due nominate equazioni, si avrà per la condizione del massimo, e del minimo

$$(X - x)dX + (Y - y)dY + (Z - z)dZ = 0$$

$$D_x u\, dX + D_y u\, dY + D_z u\, dZ = 0$$

$$D_x^2 u (X-x) dX + D_y^2 u (Y-y) dY + D_z^2 u (Z-z) dZ = 0$$

Per trovare tre equazioni dalle quali dipendano le incognite X, Y, Z, od $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ basterà, come si conosce, moltiplicare due delle trovate equazioni per esempio la prima e la terza per due fattori indeterminati, $-S$, $-T$ e fatta in seguito la somma, i nuovi coefficienti di dX, dX, dZ presi con il segno contrario si facciano eguali ai coefficienti di dX, dY, dZ della seconda, in questa guisa risulterà evidentemente

$$(X-x) D_x^2 u = S(X-x) + T D_x u$$

$$(Y-y) D_y^2 u = S(Y-y) + T D_y u$$

$$(Z-z) D_z^2 u = S(Z-z) + T D_z u$$

Il fattore S si determina col sommare queste tre equazioni dopo averle respettivamente moltiplicate per $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, cosicchè verrà

$$\pm R = S\rho, \qquad \text{od} \qquad S = \pm \frac{R}{\rho} = Q$$

e per conseguenza il moltiplicatore S non è diverso dalla quantità di già denotata per Q, d'onde le tre precedenti equazioni diverranno

$$(D_x^2 u - Q)(X - x) = T D_x u$$

$$(D_y^2 u - Q)(Y - y) = T D_y u$$

$$(D_z^2 u - Q)(Z - z) = T D_z u$$

dalle quali ricavando i valori delle tre differenze $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, e sostituendoli nell'equazione del piano tangente risulterà per Q l'equazione di condizione

$$\frac{(D_x u)^2}{D_x^2 u - Q} + \frac{(D_y u)^2}{D_y^2 u - Q} + \frac{(D_z u)^2}{D_z^2 u - Q} = 0$$

Il moltiplicatore T si troverà dopo la sostituzione delle medesime differenze nel valore di ρ. Infine i coseni degli angoli α, β, γ formati dalla direzione delle tangenti con gli assi coordinati essendo proporzionali alle stesse differenze delle coordinate, avremo il sistema di equazioni

$$\frac{(D_x^2 u - Q)\cos\alpha}{D_x u} = \frac{(D_y^2 u - Q)\cos\beta}{D_y u} = \frac{(D_z^2 u - Q)\cos\gamma}{D_z u}$$

$$= \pm \frac{1}{\left\{\left(\frac{D_x u}{D_x^2 u - Q}\right)^2 + \left(\frac{D_y u}{D_y^2 u - Q}\right)^2 + \left(\frac{D_z u}{D_z^2 u - Q}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Queste formole corrispondono ad altre di già trovate nei parag. 228 e 229.

233.° Per applicare queste differenti teorie ad un qualche esempio, prendiamo un'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e per maggior simmetria delle operazioni analitiche la porremo sotto la forma

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0$$

si avrà

$$D_x u = \frac{x}{a^2}, \quad D_y u = \frac{y}{b^2}, \quad D_z u = \frac{z}{c^2}$$

$$p = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$$

$$D_x^2 u = \frac{1}{a^2}, \quad D_y^2 u = \frac{1}{b^2}, \quad D_z^2 u = \frac{1}{c^2}$$

ed insieme

$$r = D_x^2 z = -c^2 \frac{(a^2 z^2 + c^2 x^2)}{a^4 z^3}$$

$$s = D_x D_y z = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}$$

$$t = D_y^2 z = -c^2 \frac{(b^2 z^2 + c^2 y^2)}{b^4 z^3}$$

La quantità denotata per R come dal parag. 226, sarà

$$R = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

d'onde si otterrebbe il raggio di curvatura corrispondente ad una qualunque delle sezioni normali: la direzione delle tangenti alle sezioni normali, e di curvatura principale si determina per le ultime formole dell'antecedente parag. vale a dire

$$\frac{(1 - Q a^2)\cos\alpha}{x} = \frac{(1 - Q b^2)\cos\beta}{y} = \frac{(1 - Q c^2)\cos\gamma}{z}$$

$$= \pm\left\{\left(\frac{x}{1 - Q a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1 - Q b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{1 - Q c^2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

In questo caso la Q dovrà verificare evidentemente l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2(1-Qa^2)}+\frac{y^2}{a^2(1-Qb^2)}+\frac{z^2}{c^2(1-Qc^2)}=0$$

e potrà con facilità somministrare gli effettivi valori dei raggi di curvatura principale. La trovata equazione si sottragga da quella della superficie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ricaveremo

$$\frac{x^2}{a^2-\frac{1}{Q}}+\frac{y^2}{b^2-\frac{1}{Q}}+\frac{z^2}{c^2-\frac{1}{Q}}=1$$

dunque dopo di aver calcolato uno dei valori di Q per i quali si ottiene il massimo, o minimo raggio di curvatura, si costruisca una nuova ellissoide di semiassi a', b', c' determinati dall'equazioni

$$a'^2=a^2-\frac{1}{Q},\quad b'^2=b^2-\frac{1}{Q},\quad c'^2=c^2-\frac{1}{Q}$$

Questa nuova superficie di secondo ordine passerà ancora per il punto (x, y, z) dell'ellissoide data, e poichè

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2,\quad a'^2-c'^2=a^2-c^2,\quad b'^2-c'^2=b^2-c^2$$

ne verrà che le sezioni fatte in questa nuova ellissoide con i piani coordinati sono descritte con i medesimi fuochi della prima. Ai valori dei raggi di curvatura principale ci possiamo giungere con facilità risolvendo

direttamente l'equazione di secondo grado ottenuta nel parag. 229, ciò che darà

$$\rho = -\frac{M \pm \sqrt{(M^2 - 4\,L\,N)}}{2L}$$

Per ottenere i valori di L, M, N, si chiami h la perpendicolare abbassata dal centro dell'ellissoide sulla direzione del piano tangente, si avrà, come è noto

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{1}{R}$$

e pongasi nello stesso tempo

$$a^2 + b^2 + c^2 = u^2\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = v^2$$

si troverà

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{c^2}{hz}\,, \quad rt - s^2 = \frac{c^4}{a^2\,b^2\,z^3}\,\frac{c^2}{z}$$

$$r\,(1 + q^2) - 2\,p\,q\,s + t\,(1 + q^2) = -\frac{c^4}{a^2\,b^2\,z^3}\,(u^2 - v^2)$$

d'onde

$$L = \frac{c^4}{a^2\,b^2\,c^2}\,\frac{c^2}{z}\,, \quad M = \frac{c^6}{a^2\,b^2\,h\,z^4}\,(u^2 - v^2)\,, \quad N = \frac{c^2}{h^2\,z^2}$$

e perciò

$$\rho = \frac{1}{h}\left\{\frac{u^2 - v^2}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)^2 - \frac{a^2\,b^2\,c^2}{h^2}\right)}\right\}$$

Per il centro della superficie si conduca un piano diametrale con il semiasse v, qual piano dovrà esser pa-

rallelo al piano tangente la superficie nel punto (x, y, z) e sieno v', v'' gli altri due semiassi diametrali a v, e descritti nel piano condotto per il centro della superficie, si avrà dalle note proprietà dell'ellissoide

$$v^2+v'^2+v''^2=a^2+b^2+c^2=u^2, \quad a^2 b^2 c^2=v'^2 v''^2 h^2$$

d'onde

$$u^2-v^2=v'^2+v''^2,$$

e perciò

$$\rho=\frac{1}{h}\left(\frac{v'^2+v''^2 \pm (v'^2-v''^2)}{2}\right)$$

dunque i raggi di curvatura principale saranno

$$\rho_1=\frac{v'^2}{h}, \qquad \rho_2=\frac{v''^2}{h}$$

Queste espressioni sono d'accordo con quanto di già si trovò per i raggi di curvatura delle linee del secondo ordine. Non è difficile di formare altre applicazioni, se in particolare si scelgano le superficie del secondo ordine. La maggior parte dei risultati ottenuti circa la curvatura delle superficie rapporto alle loro sezioni normali sono dovuti ad Eulero.

234.° L'andamento della curvatura per un dato punto di una superficie corrispondente alle differenti sezioni normali si riconosce assai facilmente dalla discussione dell'Equazione di secondo ordine, e che rappresenta la *linea indicatrice* della superficie proposta. Riprendiamo infatti l'equazione di già determinata al parag. 227 vale a dire

$$r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2=\pm(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$$

la quale apparterrà ad un ellissi, ad un'iperbola, od ad

una parabola ed alla varietà di queste curve. Ora come si sà dalle proprietà delle linee del secondo ordine, la precedente apparterrà ad un ellissi, se sia positiva la differenza

$$rt - s^2$$

a due iperbole conjugate, se la stessa differenza sia negativa; e nel caso che si annulli, l' equazione rappresenterà un sistema di due rette parallele, che saranno una varietà della parabola. Inoltre l' ellissi riducesi al circolo nell'ipotesi di $r = t$, ed $s = o$ che se fosse $(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} = o$ si ridurrà ad un sol punto (x, y, z). Sarà bene qui di osservare, che per ciascuna sezione normale le coordinate $X - x$, $Y - y$ verificano sempre una sola dell'equazioni

$$r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2 = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2 = -(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$$

Se dunque nel passaggio di una sezione normale ad un' altra, il primo membro dell'equazione cangia di segno, i raggi di curvatura delle due sezioni normali avranno una direzione contraria. Questa circostanza però non accade nel caso della differenza $rt - s^2$ negativa, cioè quando l'equazione rappresenta due iperbole conjugate; allora il piano tangente la superficie curva nel punto $(x, y. z)$ divide la superficie stessa in due parti, e l'una di queste comprende le sezioni normali, nelle quali il raggio di curvatura è diretto in un senso, e l'altra comprende le sezioni normali nelle qnali il raggio di curvatura ha una direzione opposta. Finchè però la differenza $rt - s^2$ si mantiene positiva, l' equazione della curva indicatrice apparterrà ad un ellissi, e si ridurrà sempre per tutte le sezioni normali ad una sola delle due ultime equazioni, e perciò in questo caso le sezioni

normali hanno la loro curvatura diretta in uno stesso senso, e la superficie curva verrà situata tutta intera da un medesimo lato del piano tangente. Da ciò possiamo conchiudere, che per la differenza $rt - s^2$ positiva, i raggi di curvatura principale diretti nello stesso senso saranno un valore minimo, ed un valore massimo di ρ per le sezioni normali della più grande, e della più piccola curvatura. All'opposto se la differenza $rt - s^2$ sia negativa, l'equazione della curva indicatrice appartiene a due iperbole conjugate, ed i raggi di curvatura principale diretti in senso contrario saranno due valori minimi di ρ per le sezioni normali della più gran curvatura. Se finalmente sia nulla la differenza $rt - s^2$ allora l'equazione di secondo grado fra le variabili $X - x$, $Y - y$ appartiene ad un sistema di due rette parallele, le quali saranno una varietà della parabola, e le sezioni principali corrispondono ad un valore minimo, e ad un valore infinito di ρ; in modo che una di queste sezioni avrà la sua curvatura nulla; ciò che è d'accordo con quanto si è di già veduto nel parag. 230.

Noi termineremo di parlare di questa importante teoria col far vedere come il sig. *Gauss* definisca, e misuri la *curvatura di una superficie*. Consideriamo una curva racchiusa, e tracciata arbitrariamente sulla superficie in modo che l'area S di questa curva comprenda un punto M, sulla superficie, della quale se ne voglia misurare la sua curvatura nello stesso punto. Fatto centro in un punto qualunque dello spazio, e con raggio 1 descriviamo una superficie sferica, e conduciamo altrettanti raggi paralleli a tutte le rette condotte perpendicolarmente alla superficie nel contorno dell'area S, il luogo geometrico di questi raggi sarà una superficie conica, la quale segna nella superficie sferica una certa area S_1. Formando il rapporto $\frac{S_1}{S}$, e cercando il limite verso il quale converge

per continuato decremento dell'area S, senza cessar di racchiudere il punto in questione; si prenderà lo stesso limite per misura della curvatura della superficie in un dato punto M. Ognun vede che questa definizione è conforme a quella stabilita per le curve piane, nelle quali chiamando s l'arco, e φ l'inclinazione; si avrà per la curvatura il limite verso il quale converge il rapporto $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$. Il sig. Gauss dimostra (*) che si ha in fine

$$\lim \frac{S_1}{S} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$$

ove ρ_1, ρ_2 sieno i raggi di curvatura delle due sezioni principali, e per conseguenza la curvatura di una superficie si misura dal prodotto delle curvature delle due sezioni principali.

Sulla superficie luogo dei centri di curvatura principale, e sulle linee di curvatura.

235.° Se giusta il consueto sia

$$u = 0$$

l'equazione della superficie curva ad X, Y, Z le coordinate del centro di curvatura di una sezione normale corrispondente al punto (x, y, z) della superficie, noi avremo per le coordinate di questo centro, come dal parag. 227

$$\frac{x-X}{D_x u} = \frac{y-Y}{D_y u} = \frac{z-Z}{D_z u} = \frac{1}{Q}$$

(*) Commentationes societatis Gottingensis vol. 6. Disquisitiones generales circa superficies curvas pag. 99.

Quando si tratti delle sezioni normali della più grande, e della più piccola curvatura, allora se gli assi coordinati sono paralleli alla direzione degli assi principali della curva del secondo ordine descritta nel piano tangente dovrà verificarsi per la Q l'equazione di già trovata al parag. 223, vale a dire

$$\frac{(D_x u)^2}{D_x^2 u - Q} + \frac{(D_y u)^2}{D_y^2 u - Q} + \frac{(D_z u)^2}{D_z^2 u - Q} = 0$$

Ciò posto l'equazione della superficie luogo dei centri di curvatura principale si troverà dall'eliminazione delle coordinate x, y, z della Q fra le cinque riportate Equazioni. Così per esempio in un'ellissoide di equazione

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0$$

troveremo

$$\frac{a^2(x - X)}{x} = \frac{1}{Q}, \quad \frac{b^2(y - Y)}{y} = \frac{1}{Q}, \quad \frac{c^2(z - Z)}{z} = \frac{1}{Q}$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(a^2 - \frac{1}{Q}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(b^2 - \frac{1}{Q}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(c^2 - \frac{1}{Q}\right)} = 0$$

dalla quale come dal parag. 223

$$\frac{x^2}{\left(a^2 - \frac{1}{Q}\right)} + \frac{y^2}{\left(b^2 - \frac{1}{Q}\right)} + \frac{z^2}{\left(c^2 - \frac{1}{Q}\right)} = 1$$

Ora abbiamo

$$x = \frac{a^2 X Q}{a^2 Q - 1}, \quad y = \frac{b^2 Y Q}{b^2 Q - 1}, \quad z = \frac{c^2 Z Q}{c^2 Q - 1}$$

quali valori sostituiti nelle ultime due otterremo

$$\frac{a^2 X^2}{\left(a^2-\frac{1}{Q}\right)^3}+\frac{b^2 Y^2}{\left(b^2-\frac{1}{Q}\right)^3}+\frac{c^2 Z^2}{\left(c^2-\frac{1}{Q}\right)^3}=0$$

$$\frac{a^4 X^2}{\left(a^2-\frac{1}{Q}\right)^3}+\frac{b^4 Y^2}{\left(b^2-\frac{1}{Q}\right)^3}+\frac{c^4 Z^2}{\left(c^2-\frac{1}{Q}\right)^3}=1$$

Eliminando infine Q fra queste due risulterà un equazione fra le X, Y, Z la quale appartiene al luogo dei centri di curvatura principale.

Che se invece di eliminare le x, y, z si sostituiscano i valori delle differenze

$$a^2-\frac{1}{Q}=\frac{a^2X}{x}\,,\quad b^2-\frac{1}{Q}=\frac{b^2Y}{y}\,,\quad c^2-\frac{1}{Q}=\frac{c^2Z}{z}$$

si avrà

$$\frac{x^3}{a^4X}+\frac{y^3}{b^4Y}+\frac{z^3}{c^4Z}=0\quad \frac{x^3}{a^2X}+\frac{y^3}{b^2Y}+\frac{z^3}{c^2Z}=1$$

Sarà bene qui conoscere le curve le quali prevengono dall'intersezione dei piani coordinati con la doppia superficie luogo dei centri di curvatura principale dell'ellissoide. Consideriamo primieramente un'intersezione con il piano delle $x\,y$, ciò che porta a fare $z=0$, $Z=0$. Ora all'equazione

$$\frac{x^2}{a^2\left(a^2-\frac{1}{Q}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(b^2-\frac{1}{Q}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(c^2-\frac{1}{Q}\right)}=0$$

per la supposizione di $z = 0$, si soddisfa prendendo $c^2 - \frac{1}{Q} = 0$, ciò che rende indeterminato l'ultimo termine, od anche prendendo

$$\frac{x^2}{a^2\left(a^2 - \frac{1}{Q}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(b^2 - \frac{1}{Q}\right)} = 0$$

Supponendo $c^2 - \frac{1}{Q} = 0$, si ricaverà dai valori di x, y

$$\frac{x}{a} = \frac{a\,X}{a^2 - c^2}, \quad \frac{y}{b} = \frac{b\,Y}{b^2 - c^2}$$

quali sostituiti nell'equazione dell'ellissoide, e supposto $z = 0$, si otterrà

$$\frac{a^2\,X^2}{(a^2 - c^2)^2} + \frac{b^2\,Y^2}{(b^2 - c^2)^2} = 1$$

la quale appartiene evidentemente ad un ellissi. La seconda curva d' intersezione con il medesimo piano si determina dalle due equazioni

$$\frac{x^3}{a^4\,X} + \frac{y^3}{b^4\,Y} = 0, \quad \frac{x^3}{a^2\,X} + \frac{y^3}{b^2\,Y} = 1$$

le quali porgono

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{a\,X}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{y}{b} = \left(\frac{b\,Y}{b^2 - a^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Se questi medesimi valori si sostituiscano nell'equazione dell'ellissoide dopo di aver fatto $z = 0$, verrà

$$\left(\frac{a\,X}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\,Y}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Questa curva rappresenta l'evoluta dell'ellissi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

come si sarebbe potuto prevedere.

236.° Quella serie di punti situati sopra una superficie, nei quali due normali infinitamente vicine s'incontrano scambievolmente, vengono a determinare delle curve particolari, che da *Monge* sono state chiamate *linee di Curvatura*. Per riconoscere l'esistenza di queste linee, prendiamo l'equazione della superficie, risoluta rapporto ad una delle coordinate, cioè

$$z = f(x, y)$$

e nello stesso tempo, l'equazioni della normale saranno

$$X - x + p(Z - z) = 0$$

$$Y - y + q(Z - z) = 0$$

Da questa retta si passa ad un'altra infinitamente vicina col differenziare l'equazioni rapporto alle sole variabili x, y, z, mentre sotto l'indicata ipotesi le X, Y, Z appartengono al punto d'intersezione; si avrà dunque dalla differenziazione

$$dx + p\,dz = (Z - z)\,dp$$

$$dy + q\,dz = (Z - z)\,dq$$

Di qui ne segue, che per la determinazione delle tre incognite X, Y, Z abbiamo ottenute quattro equazioni, e per conseguenza due normali alla superficie curva non si potranno incontrare, qualunque sia il ravvicinamento dei due punti nella superficie; contuttociò l'incontro potrà aver luogo, qualora il secondo punto infinitamente vicino al primo sia preso in modo da verificar l'equa-

zione di condizione, dataci dalle quattro equazioni per l'eliminazione delle X, Y, Z. Ora le due ultime non contenendo che la z, otterremo dall' eliminazione di $Z - z$

$$(dx + p\,dz)\,dq = (dy + q\,dz)\,dp$$

ove sostituendoci

$$dz = p dx + q dy\ ,\quad dp = r dx + s dy\ ,\quad dq = s dx + t dy$$

risulterà

$$(t's - s't)\frac{dy^2}{dx^2} + (t'r - r't)\frac{dy}{dx} + (r's - s'r) = 0$$

ove per brevità

$$r' = 1 + p^2\ ,\qquad s' = pq\ ,\qquad t' = 1 + q^2$$

Quest' equazione di secondo grado essendo identica a quella di già trovata nel parag. 228 per determinare la direzione delle tangenti alle sezioni normali di curvatura principale, ne segue in generale, che per ogni punto della superficie vi sono due linee di curvatura le quali s'incontreranno ad angolo retto, e saranno tangenti alle sezioni normali di curvatura principale; le linee di curvatura sono generalmente curve a doppia curvatura, e differenti dalle sezioni principali. Monge chiama quindi *raggi di Curvatura* della superficie quelle porzioni della normale compresa fra il punto (x, y, z) ed il punto ove viene incontrata da due altre normali infinitamente vicine. Se si chiami ρ questa normale, si avrà

$$\rho^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2$$

ovvero

$$\rho = (Z - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Per calcolare questa distanza ρ, la quale convenga ad

ambedue le linee di curvatura, si sostituiscano i noti valori di dz, dp, dq nelle due equazioni

$$dx + p\,dz = (Z - z)\,dp$$

$$dy + q\,dz = (Z - z)\,dq$$

e troveremo

$$\left((1 + p^2) - (Z - z)r\right)dx = \left((Z - z)\,s - pq\right)dy$$

$$\left((1 + q^2) - (Z - z)\,t\right)dy = \left((Z - z)\,s - pq\right)dx$$

Moltiplicandole adesso fra di loro e sostituendoci

$$R_1 = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad Z - z = \frac{\rho}{R_1}$$

risulterà

$$(rt - s^2)\rho^2 - \left((1 + q^2)r - 2pqs + (1 + q^2)t\right)R_1\rho + R_1^4 = 0$$

Questa equazione è identica a quella di già trovata al parag. 229 per i due raggi di curvatura principale, e per conseguenza i due raggi di curvatura della superficie coincidono ed in grandezza, ed in posizione con i due raggi di curvatura principale.

237.° Esaminiamo particolarmente il corso nel quale un punto della superficie sia un *Ombilic*: abbiamo di già osservato verso la fine del parag. 230, che quando fra i coefficienti differenziali di primo e di secondo ordine sussista la relazione

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}$$

allora l' equazione di secondo grado rapporto a $\frac{dy}{dx}$, che si può chiamare *Equazione delle linee di curvatura*

diviene identica, ciò che porta a concludere, che in questi particolari punti vi passino un' infinità di linee di curvatura; ed infatti sotto l' indicata ipotesi le sezioni normali sono tutte principali, e per conseguenza tutte le linee di curvatura tangenti a tutte le infinite sezioni normali saranno esse stesse infinite di numero; contuttociò secondo il sig. *Dupin* questo numero è limitato, ma come fa riflettere *Poisson* queste linee di curvatura saranno infinite di numero, se si tenga soltanto conto, rapporto al ravvicinamento delle normali, che agli infinitesimi di primo ordine; ma spingendo l'approssimazione agli infinitesimi degli ordini superiori, allora vi saranno alcune particolari direzioni, nelle quali il ravvicinamento delle normali sarà più intimo che per le altre; quindi è che per queste particolari direzioni corrisponderà certamente un numero limitato di linee di curvatura; andiamo a verificare l' enunciata proposizione per mezzo dell' analisi. Si riprendano l' equazioni della normale

$$X - x + p(Z - z) = o$$
$$Y - y + q(Z - z) = o$$

e sostituendo $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ in luogo di x, y, z . . . si tenga conto dei differenziali di secondo ordine, si ricaverà con facilità dopo la sottrazione delle medesime equazioni come per il teorema di Taylor esteso a più variabili

$$dx + pdz + \tfrac{1}{2}(p\, d^2z + 2dp\, dz) - (Z - z)(dp + \tfrac{1}{2} d^2p) = o$$
$$dy + qdz + \tfrac{1}{2}(q\, d^2z + 2dq\, dz) - (Z - z)(dq + \tfrac{1}{2} d^2q) = o$$

Eliminando la differenza $Z - z$ si otterrà la condizione dell'incontro, ciò che da

$$(dx + p\, dz + \tfrac{1}{2} p\, d^2z + dp\, dz)(dq + \tfrac{1}{2} d^2q)$$
$$= (dy + q\, dz + \tfrac{1}{2} q\, d^2z + dq\, dz)(dp + \tfrac{1}{2} d^2p)$$

Quando un punto della superficie è un *Ombilic*, abbiamo veduto al parag. 230 che l'equazione alle linee di curvatura

$$(dx + p\, dz)\, dq = (dy + q\, dz)\, dp$$

è identicamente nulla; quindi tenendo conto dei soli differenziali del terzo ordine, otterremo la nuova equazione di condizione

$$(dx + p\, dz)\, d^2q + (p\, d^2z + dp\, dz)\, dq$$

$$= (dy + q\, dz)\, d^2p + (q\, d^2z + dq\, dz)\, dp$$

per mezzo della quale si determina la direzione delle linee di curvatura, che passano per un *Ombilic.*

Facendo la sostituzione dei differenziali

$$dz = p\, dx + q\, dy\,, \qquad dp = r\, dx + s\, dy$$

$$dq = s\, dx + t\, dy\,,$$

si otterrà il rapporto $\frac{dy}{dx}$ alla terza potenza, e perciò per un *Ombilic* vi passa una, o tre linee di curvatura; che se anche la trovata equazione di terzo grado fosse in qualche punto della superficie, identicamente nulla, allora tenendo conto dei differenziali terzi, si giungerebbe ad una equazione di quarto grado relativa a $\frac{dy}{dx}$, ... e così di seguito; e per conseguenza diremo in generale, che per un *Ombilic* passerà sempre un numero determinato di linee di curvatura. Noi faremo qui un'osservazione la quale può avere un uso vantaggioso nelle applicazioni; la nuova equazione di terzo grado relativa a $\frac{dy}{dx}$ è precisamente il differenziale della prima

$$(dx + p\, dz)\, dq = (dy + q\, dz)\, dp$$

quando si ritengano per costanti dx, dy. Con questa osservazione sarà assai facile di trovare le nuove equazioni alle linee di curvatura, quando per un qualche punto particolare della superficie, tutte le antecedenti divenissero identicamente nulle.

Per indicare brevemente, quando possa succedere una delle indicate circostanze prendiamo un'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

e la precedente equazione di secondo grado rapporto a $\frac{dy}{dx}$ di già ottenuta nel parag. 228 diverrà facilmente

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(Bx^2-Ay^2-AB)\frac{dy}{dx}-Bxy=o$$

ove per brevità

$$A=\frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2},\quad B=\frac{b^2(a^2-b^2)}{b^2-c^2}$$

Da questa equazione si determineranno per ciascun punto della superficie le direzioni alle linee di curvatura; se la supponiamo identicamente nulla, si avrà evidentemente

$$xy=o\quad Bx^2-Ay^2-AB=o$$

alla quale non si può soddisfare per valori reali che da $y=o$, ciò che da insieme

$$x=\pm\sqrt{A}$$

Differenziando l'equazione trovata, e ritenendo costanti dx, dy verrà

$$Ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-Ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+Bx\left(\frac{dy}{dx}\right)-By=o$$

ove sostituito

$$y = o\,, \qquad x = \sqrt{A}$$

darà

$$\frac{dy}{dx} = o\,, \qquad A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B = o$$

La seconda non essendo soddisfatta da valori reali, ne segue che per il punto

$$y = o\,, \qquad x = \sqrt{A}$$

dell'ellissoide, ove corrisponde un *Ombilic*, non vi passa che una sola linea di curvatura. Per un completo esame delle linee di curvatura possono consultarsi le opere di *Monge* e del sig. *Leroy* (Analyse appliquée a la Geometrie). Noi termineremo di parlare delle linee di curvatura col fare insieme con Poisson un'interessante osservazione, la quale riguarda ancora le proposizioni ennunciate sulla curvatura delle superficie. Tutto ciò che è stato detto sulla curvatura delle superficie della considerazione del piano tangente, e dalla descrizione della linea di second'ordine descritta nel medesimo piano, suppone che le rette tangenti a tutte le sezioni sieno comprese in uno stesso piano tangente condotto in un dato punto; ma vi sono dei punti sopra certe superficie, nei quali quantunque unico sia il piano tangente, contuttociò non sussistono più i teoremi di già richiamati sulla curvatura delle superficie. In questi punti speciali, la direzione delle linee di curvatura, non prende una forma indeterminata, come negli *Ombilics*, ma il loro numero è maggior di due, e potrebbe essere quattro, sei, ... od un numero pari in generale; nei medesimi punti il raggio di curvatura di una sezione normale potrebbe ricevere più massimi, o minimi, ed il loro numero corrisponderà sempre a quello delle linee di curvatura.

Sul contatto delle linee e delle superficie.

238.° Se delle tre coordinate rettilinee di un punto di una curva tracciata nello spazio se ne consideri una, per esempio la x come variabile indipendente, allora le due equazioni simultanee

$$y = \varphi(x) \;, \qquad z = \psi(x)$$

le quali appartengono alle projezioni della medesima linea nei piani $y\,x$, $z\,x$, saranno atte a rappresentare la natura della curva proposta. Supponiamo adesso che di un' altra linea tracciata parimenti nello spazio, sia l'equazione

$$y = \Phi(x) \;, \qquad z = \chi(x)$$

Se queste due curve vengano ad incontrarsi in un qualche punto $(x\,,\,y\,,\,z)$, in modo da ritenere per questo punto i medesimi valori delle coordinate x, y, z; si verificherà evidentemente

$$\varphi(x) = \Phi(x) \;, \qquad \psi(x) = \chi(x).$$

Queste equazioni soddisfatte simultaneamente da valori reali sono sufficienti a determinare i punti d'incontro delle due curve. Immaginiamo ora che le due curve abbiano fra di loro un contatto in un dato punto; alle precedenti equazioni dovranno aggiungersi le condizioni della retta tangente comune: ciò che porta naturalmente il sistema

$$\varphi'(x) = \Phi'(x) \;, \qquad \psi'(x) = \chi'(x)$$

Quando due date linee tracciate nello spazio hanno comune la retta tangente in un punto dato, e per conseguenza comune un sol punto, si dirà che sono fra di

loro ad un contatto di primo ordine. Che se come già si è fatto per le curve piane, abbiano ancora a verificarsi

$$\varphi''(x) = \Phi''(r) \,, \qquad \psi''(x) = \chi''(x)$$

allora diremo che queste due curve hanno comune la retta tangente, il piano osculatore, il circolo osculatore, il piano normale, la normale principale, e si toccano per conseguenza alla medesima curvatura: il contatto in questione dicesi di secondo ordine, od anche osculazione, e le curve si diranno per la stessa ragione, osculatrici. Proseguendo nella stessa guisa, diremo che due curve nelle quali, oltre le precedenti, si verifichi ancora

$$\varphi'''(x) = \Phi'''(x) \,, \qquad \psi'''(x) = \chi'''(x)$$

sono fra di loro in un dato punto (r, y, z) ad un contatto del terzo ordine; ed in generale il contatto si dirà dell'ordine n^{esimo}, se le funzioni, e le derivate da y, z fino all' en^{esima} conservino i medesimi valori nel passaggio da curva ad un'altra. Ognun vede dalle precedenti condizioni, che quante volte due curve situate nello spazio siano fra di loro in un dato punto ad un contatto di un ordine, lo saranno anche al medesimo ordine di contatto le projezioni delle linee nei tre piani coordinati.

239.° Scegliendo per esempio, l' arco s per variabile indipendente, e le coordinate x, y, z funzioni dello stesso arco, si giunge facilmente a stabilire, che le due curve avranno un contatto dell'ordine n, se le funzioni

$$x \,,\; y \,,\; z \,,\; D_s x \,,\; D_s y \,,\; D_s z \,,\; D_s^2 x, D_s^2 y,\; D_s^2 z$$

$$\ldots\ldots D_s^n x \,,\; D_s^n y \,,\; D_s^n z \,,$$

conservino il medesimo valore nel passaggio da una curva

all'altra; sotto questa ipotesi le tre nuove derivate

$$D_s^{n+1}x\,,\qquad D_s^{n+1}y\,,\qquad D_s^{n+1}z\,,$$

o qualcuna di esse dovrà prendere un valore differente. Che se scelgasi un'altra data quantità

$$r = F(x,\; y,\; z)$$

funzione essa stessa dell'arco s, avremo egualmente

$$D_s r = D_x r\, D_s x + D_y r\, D_s y + D_z r\, D_s z$$

$$D_s^2 r = D_x^2 r\, D_s^2 x + D_y^2 r\, D_s^2 y + D_z^2 r\, D_s^2 z + \dots$$

. . . .

$$D_s^n r = D_x^n r\, D_s^n x + D_y^n r\, D_s^n y + D_z^n r\, D_s^n z + \dots$$

Qui pure si conclude, che se due curve abbiano fra di loro un contatto dell'ordine n tutte le funzioni

$$r\,,\quad D_s r\,,\quad D_s^2 r\,,\quad D_s^3 r\,,\;\dots\; D_s^n r$$

conserveranno il medesimo valore nel passaggio di una curva ad un'altra per il punto di contatto.

Per mostrare una qualche applicazione snpponiamo di voler conoscere l'ordine del contatto, che passa fra una curva data tracciata nello spazio, ed un circolo determinato dall'intersezione di una sfera, e di un piano che passa per il centro; se sieno X, Y, Z le coordinate del centro, e ρ il raggio, avremo primieramente le due equazioni

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = \rho^2$$

$$A(X - x) + B\,(Y - y) + C\,(Z - z) = 0$$

Ora i valori delle sette indeterminate

$$X,\; Y,\; Z,\; \rho,\qquad A,\; B,\; C$$

e che evidentemente si ridurranno a sei, si otterranno da una doppia differenziazione di ambedue l' equazioni nella supposizione di x, y, z variabili, vale a dire

$$(X - x)\, dx + (Y - y)\, dy + (Z - z)\, dz = o$$

$$(X-x)\, d^2x + (Y-y)\, d^2y + (Z-z)\, d^2z - dx^2 - dy^2 - dz^2 = o$$

$$A\, dx + B\, dy + C\, dz = o, \quad A\, d^2x + B\, d^2y + C\, d^2z = o$$

Da queste due ultime si ricaveranno i valori di A, B, C come si è fatto al parag. 184, ed allora si deduce l'equazione del piano osculatore

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = o$$

la quale unita alle due provenienti dalla differenziazione di ρ^2, avremo le altre tre indeterminate X, Y, Z, e quindi il raggio ρ. Da tutto ciò si vede che questo circolo sarà l'osculatore della curva, e toccherà la curva nel punto (x, y, z) ad un contatto del second' ordine, mentre nelle trovate espressioni non vi sono che differenziali del primo, e secondo ordine: di più le precedenti formole sussistono qualunque sia la scelta della variabile indipendente.

240.° Per il contatto di due superficie curve che supporremo rappresentate dall'equazioni

$$z = f(x, y), \qquad z = \mathrm{f}(x, y)$$

noi osserveremo che chiamando Δx, Δy, Δz tre incrementi infinitesimi delle x, y, z comuni alle due superficie, la differenza

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - \mathrm{f}(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

sarà un infinitesimo di un certo ordine, e che potremo anche assumere per l'ordine del contatto delle due superficie nel punto (x, y, z).

Pongasi

$$\Delta x = \alpha\, dx\,, \qquad \Delta y = \alpha\, dy$$

ed insieme

$$F(\alpha) = f(x + \alpha\, dx, y + \alpha\, dy) - f(x + \alpha\, dx, y + \alpha\, dy)$$

ove $F(\alpha)$ sarà infinitesimo con α. Supponiamo che $F(\alpha)$ sia un'infinitesimo dell'ordine n, allora è chiaro, che si avrà

$$F(o) = o\,,\ F'(o) = o\,,\ F''(o) = o\ \ldots\ F^{(n)}(o) = o$$

o ciò che torna lo stesso

$$f(x, y) - f(x, y) = o \quad d f(x, y) - d f(x, y) = o$$

$$d^2 f(x, y) - d^2 f(x, y) = o\,,\ \ldots\ldots$$

$$d^n f(x, y) - d^n f(x, y) = o\,,$$

Se si eseguiscano queste differenziazioni, e si avverta alla indipendenza delle variabili x, y, vedremo che le precedenti condizioni si ridurranno alle parziali

$$f(x, y) = f(x, y)\,, \quad D_x f(x, y) = D_x f(x, y) = o$$

$$D_y f(x, y) = D_y f(x, y)\,, \quad D_x^2 f(x, y) = D_x^2 f(x, y)$$

$$D_x D_y f(x, y) = D_x D_y f(x, y), \quad D_y^2 f(x, y) = D_y^2 f(x, y) = o$$

. . . .

$$D_x^n f(x, y) = D_x^n f(x, y)\,, \quad D_y^n f(x, y) = D_y^n f(x, y)$$

$$D_x^{n-1} D_y f(r, y) = D_x^{n-1} D_y f(x, y)$$

$$D_y^{n-1} D_x f(x, y) = D_y^{n-1} D_x f(x, y)$$

. . . . . .

Sull'Equazioni a derivate parziali delle superficie curve generate dal movimento delle linee.

241.° Se fra due parametri, o costanti arbitrarie C, C_1, e due quantità v, w funzioni delle tre coordinate rettilinee sussistano le relazioni

$$v = C\,, \qquad w = C_1$$

ed insieme sia

$$C_1 = \varphi(C)$$

allora come già si conosce

$$w = \varphi(v)$$

rappresenterà una superficie generata dal moto di una linea, della quale le sue equazioni sono evidentemente

$$v = C\,, \qquad w = \varphi(C)$$

Il movimento della linea generatrice

$$v = C\,, \qquad w = \varphi(C)$$

è tale che la costruzione della superficie generata dipende da una sola funzione arbitraria: e sarà assai facile per mezzo di alcune equazioni a derivate parziali del primo ordine, far scomparire la funzione arbitraria contenuta nella sua equazione finita

$$w = \varphi(v)$$

Infatti considerando la z, funzione delle altre due x, y, e ponendo

$$p = D_x z\,, \qquad q = D_y z$$

noi avremo da una successiva derivazione parziale rap-

porto ad x, ed y le due nuove equazioni

$$D_x w + p\, D_z w = \varphi'(v)\,(D_x v + p\, D_z v)$$

$$D_y w + q\, D_z w = \varphi'(v)\,(D_y v + q\, D_z v)$$

ove dividendo la prima per la seconda e facendo per brevità

$$R = D_x w\, D_y v - D_x v\, D_y w\,, \qquad P = D_z v\, D_y w - D_y v\, D_z w$$

$$Q = D_x v\, D_z w - D_x w\, D_z v$$

verrà

$$P p + Q q = R$$

Tal'è l' equazione a derivate parziali di già rinvenuta con lo stesso metodo al parag. 83, quando si parlava dell'eliminazione delle funzioni arbitrarie contenute nell'equazioni finite. Alla medesima espressione si può giungere anche nel modo seguente. Si differenzino completamente le due equazioni della generatrice

$$v = C\,, \qquad w = C_1$$

si avrà

$$D_x v\, dx + D_y v\, dy + D_z v\, dz = o$$

$$D_x w\, dx + D_y w\, dy + D_z w\, dz = o$$

dalle quali per via dell'eliminazione troveremo

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

D'altronde per la considerazione di z funzione delle x, y, si ha

$$dz = p\, dx + q\, dy$$

ove sostituiti i valori di dx, dy, dz, tornerà l'equazione a derivate parziali di già ritrovata. Questa teoria

trova una facile applicazione alle superficie cilindriche, coniche, conoidi, e di rivoluzione.

242.° In una superficie cilindrica generata da una retta, che muovesi parallelamente a se stessa, potremo avere due equazioni comprese nelle formole

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

ove x_0, y_0, z_0 sono le coordinate di un punto dato della retta in proposito; ed avremo dalla differenziazione

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}$$

quindi per il consueto valore di dz, otterremo l'equazione a derivate parziali di tutte le superficie cilindriche

$$c=ap+bp$$

Nell' ipotesi degli assi ortogonali, le costanti a, b, c rappresentano i coseni degli angoli che la generatrice forma con i medesimi. È facile poi da una semplicissima considerazione geometrica stabilire la ritrovata equazione. Ponendo

$$bx_0-ay_0=C\,,\qquad cx_0-az_0=C_1$$

l'equazioni della generatrice saranno

$$bx-ay=C\,,\qquad cx-az=\varphi(C)$$

Che se la generatrice vien data come l' intersezione di due piani

$$lx+my+nz=C\,,\qquad l_1x+m_1y+n_1z=C_1$$

allora dalla differenziazione si ha egualmente

$$l\,dx+m\,dy+n\,dz=o\,,\qquad l_1dx+m_1dy+n_1dz=o$$

d'onde

$$\frac{dx}{mn_1 - m_1n} = \frac{dy}{nl_1 - ln_1} = \frac{dz}{lm_1 - ml_1}$$

e quindi fatto

$$mn_1 - m_1n = a\,, \quad nl_1 - ln_1 = b\,, \quad lm_1 - ml_1 = c$$

si otterrà la stessa equazione di prima.

Per una superficie *conica* generata dal moto di una retta attorno un punto fisso (x_0, y_0, z_0) che si riduce alla sommità del cono, noi avremo l'equazioni della forma

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Per questa generatrice noi faremo

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b}{a} = \mathrm{C}\,, \quad \frac{z - z_0}{x - x_0} = \frac{c}{a} = \mathrm{C}_1$$

quindi dalla differenziazione

$$(x - x_0)\,dy - (y - y_0)\,dx = 0$$

$$(x - x_0)\,dz - (z - z_0)\,dx = 0$$

ossia

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}$$

d'onde il consueto valore

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

darà immediatamente

$$z - z_0 = p\,(x - x_0) + q\,(y - y_0)$$

Quest'equazione a derivate parziali atta a rappresentare

una superficie conica qualunque si può ritrovare col riflettere, che il piano tangente una superficie lo tocca lungo tutta l'intera generatrice

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = C, \quad \frac{z - z_0}{x - x_0} = \varphi(C)$$

e quindi passerà anche per la sommità (x_0 , y_0 , z_0). Nell'ipotesi che l'origine sia nello stesso vertice, allora l'equazioni della generatrice divengono

$$\frac{y}{x} = C, \quad \frac{z}{x} = \varphi(C)$$

come

$$z = px + qy$$

sarà l'equazione a derivate parziali.

243.° Una superficie *conoide* è generata dal movimento di una retta parallela ad un piano dato, e costretta a strisciare costantemente sopra una retta fissa, che dicesi *asse*, e ad una curva data. Sieno x_0, y_0, z_0 le coordinate di un punto dato dell'asse; le sue equazioni saranno della forma

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

La retta generatrice potrà essere considerata come l'intersezione di due piani

$$L\,x + M\,y + N\,z = K$$

$$L'(x - x_0) + M'(y - y_0) + N'(z - z_0) = 0$$

il primo dei quali sia parallelo al piano dato, ed il secondo passi per l' asse; quindi è che fra i coefficienti L', M', N' ed a, b, c sussisterà la relazione

$$L'a + M'b + N'c = 0$$

Eliminando N′ verrà con facilità

$$\frac{L'}{M'}=\frac{b(z-z_0)-c(y-y_0)}{c(x-x_0)-a(z-z_0)}$$

Qui le costanti arbitrarie sono evidentemente i coefficienti L′, M′, N′ e K, e perciò l'equazioni della generatrice saranno

$$Lx+My+Nz=C,\quad \frac{b(z-z_0)-c(y-y_0)}{c(x-x_0)-a(z-z_0)}=\varphi(C)$$

Differenziando i primi membri, otterremo le nuove equazioni differenziali

$$L\,dx+M\,dy+N\,dz=o$$

$$\big(b(z-z_0)-c(y-y_0)\big)dx+\big(c(x-x_0)-a(z-z_0)\big)\,dy$$

$$+\big(a(y-y_0)-b(x-x_0)\big)\,dz=o$$

od anche ponendo

$$L_1=b(z-z_0)-c(y-y_0)$$

$$M_1=c(x-x_0)-a(z-z_0)$$

$$N_1=a(y-y_0)-b(x-x_0)$$

verrà

$$L\,dx+M\,dy+N\,dz=o,\quad L_1\,dx+M_1dy+N_1dz=o$$

d'onde

$$\frac{dx}{MN_1-M_1N}=\frac{dy}{NL_1-N_1L}=\frac{dz}{LM_1-ML_1}$$

quali valori sostituiti nella consueta espressione di dz, ricaveremo

$$LM_1-ML_1=p\,(MN_1-M_1N)+q\,(NL_1-LN_1)$$

la quale si potrà anche porre sotto la forma

$$\frac{L_1 + p N_1}{L + p N} = \frac{M_1 + q N_1}{M + q N}$$

e sostituendoci nuovamente i valori di L_1 , M_1 , N_1 sarà

$$\frac{b(z-z_0) - c(y-y_0) + p\Big(a(y-y_0) - b(x-x_0)\Big)}{L + p N}$$

$$= \frac{c(x-x_0) - a(z-z_0) + q\Big(a(y-y_0) - b(x-x)\Big)}{M + q N}$$

Oltre queste due, avvene una terza più semplice delle precedenti, e che verrò ad indicare in poche parole. Nei due membri della prima trovata espressione dopo la sostituzione dei coefficienti L_1 , M_1 , N_1 si aggiungano le quantità

$$p\, a\, L\,(x - x_0)\,, \quad q\, b\, M\,(y - y_0)\,, \quad - c\, N(z - z_0)$$

risulterà

$$(aL + bM + cN)\Big(p\,(x-x_0) + q\,(y-y_0) - (z-z_0)\Big)$$

$$= (ap + bq - c)\,\Big(L(x-x_0) + M(y-y_0) + N(z-z_0)\Big)$$

Quando gli assi fossero ortogonali, e si volesse di più che la generatrice fosse perpendicolare all'asse della Conoide, allora chiamando α , β , γ gli angoli che l'asse delle superficie forma con gli assi delle x, y, z, si avrebbe

$$a = \cos\alpha\,, \qquad b = \cos\beta\,, \qquad c = \cos\gamma$$

ed insieme si potrebbe prendere

$$L = \cos\alpha\,, \qquad M = \cos\beta\,, \qquad N = \cos\gamma$$

in questa ipotesi, l'equazione si ridurrà ad

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) - (z - z_0)$$
$$= (ap + bq - c)\Big(L(x-x_0) + M(y-y_0) + N(z-z_0)\Big)$$

È facile di formare un'enunciato geometrico di prima espressione. Supponiamo adesso, che l'asse della superficie si confonda con l'asse delle z, e che il punto (x_0, y_0, z_0) coincida con l'origine, ed insieme la generatrice sia parallela al piano delle xy, si avrà

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

come

$$L = M = 0 \qquad \text{ed} \qquad a = b = 0, \quad c = N = 1$$

quindi l'equazione a derivate parziali della superficie conoide diviene

$$px + qy = 0$$

ed è chiaro che l'equazioni della generatrice saranno

$$\frac{y}{x} = C \quad , \qquad z = \varphi(C)$$

Sarà utile qui di osservare che le precedenti ultime equazioni sussistono quando anche fossero obliqui gli assi coordinati.

244.° Una superficie di *rivoluzione* vien generata dalla rotazione di una curva attorno un dato asse, ed anche può concepirsi generata da un circolo di raggio variabile, perpendicolare all'asse di rotazione, e di centro nei respettivi punti dell'asse.

Sieno x_0, y_0, z_0 le coordinate di un punto dato dell'asse, è evidente che l'equazione del circolo di raggio variabile, potrà considerarsi come l'intersezione di un piano perpendicolare all'asse, e di una sfera di raggio R variabile, col centro x_0, y_0, z_0 nell'asse stesso. Ri-

tenendo come sopra, che ε, ε', ε'' sieno gli angoli degli assi xy, xz, yz, avremo le due equazioni

$$L\,x + M\,y + N\,z = K$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + 2(x-x_0)(y-y_0)\cos\varepsilon$$

$$+ 2(x-x_0)(z-z_0)\cos\varepsilon' + 2(y-y_0)(z-z_0)\cos\varepsilon'' = R^2$$

Qui le costanti arbitrarie saranno

$$C = K\,, \qquad C_1 = R^2$$

per cui queste equazioni appartengono alla generatrice. Differenziando, e facendo per brevità

$$L_1 = x - x_0 + (y - y_0)\cos\varepsilon + (z - z_0)\cos\varepsilon'$$

$$M_1 = y - y_0 + (x - x_0)\cos\varepsilon + (z - z_0)\cos\varepsilon''$$

$$N_1 = z - z_0 + (x - x_0)\cos\varepsilon' + (y - y_0)\cos\varepsilon''$$

verrà

$$L\,dx + M\,dy + N\,dz = 0$$

$$L_1 dx + M_1 dy + N_1 dz = 0$$

quindi dall'eliminazione, e dalla sostituzione dei valori di dx, dy, dz nella consueta formola

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

si avrà

$$LM_1 - L_1 M = p\,(MN_1 - NM_1) + q\,(NL_1 - LN_1)$$

Facciamo di nuovo la sostituzione dei valori di L_1, M_1, N_1, e raccogliamo i termini moltiplicati per i fattori

$x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, si ricaverà

$$(x-x_0)\left(p\,(\mathrm{M}\cos\varepsilon' - \mathrm{N}\cos\varepsilon) + q\,(\mathrm{N} - \mathrm{L}\cos\varepsilon') + \mathrm{M} - \mathrm{L}\cos\varepsilon\right)$$

$$+(y-y_0)\left(p\,(\mathrm{M}\cos\varepsilon'' - \mathrm{N}) + q\,(\mathrm{N}\cos\varepsilon - \mathrm{L}\cos\varepsilon'') + \mathrm{M}\cos\varepsilon - \mathrm{L}\right)$$

$$+(z-z_0)\left(p\,(\mathrm{M} - \mathrm{N}\cos\varepsilon'') + q(\mathrm{N}\cos\varepsilon' - \mathrm{L}) + \mathrm{M}\cos\varepsilon' - \mathrm{L}\cos\varepsilon''\right) = 0$$

Tal'è sotto la forma più generale l'equazione a derivate parziali di una superficie di rivoluzione. Nell'ipotesi che gli assi sieno ortogonali; si riduce ad

$$(x-x_0)\,(\mathrm{M}+q\mathrm{N}) - (y-y_0)\,(\mathrm{L}+p\mathrm{N}) + (z-z_0)\,(p\mathrm{M}-q\mathrm{L}) = 0$$

Che se inoltre l'asse di rotazione si confonda con l'asse delle z, ed il punto (x_0, y_0, z_0) sia la stessa origine delle coordinate, avremo

$$qx - py = 0$$

In questo caso, l' equazioni della generatrice saranno della forma

$$z = \mathrm{C}\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(\mathrm{C})$$

od anche della forma più semplice

$$z = \mathrm{C}\,, \qquad x^2 + y^2 = \varphi(\mathrm{C})$$

Ambedue delle indicate equazioni soddisfano alla medesima equazione a derivate parziali.

È assai facile di formare delle applicazioni data che sia l' equazione della curva generatrice attorno l' asse delle z. Per mostrare un solo esempio interessante, e che trovasi congiunto con altre teorie di già esposte, consideriamo una superficie di rivoluzione, la quale è conosciuta sotto il nome di *superficie del toro*, e che vien generata dalla rotazione di un circolo attorno un dato

asse che non passa per il centro. Sia a la distanza del centro dall' asse di rotazione, e che riterremo essere quelle delle z, sia c il raggio di questo circolo, ed u l' ordinata di un punto qualunque della circonferenza, corrispondente all'ascissa z, si avrà in generale

$$x^2 + y^2 = u^2$$

d'altronde per l'equazione del circolo di raggio c, si ha

$$u - a = (c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

d'onde la richiesta equazione del *toro* sarà

$$x^2 + y^2 = \left(a + (c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

od anche

$$\left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - a\right)^2 = c^2 - z^2$$

Se si tolgano i radicali si giungerà ad un'equazione di quarto grado, e perciò la superficie del *toro* appartiene al quarto ordine, e che sarà

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - c^2)^2 = 4a^2 (x^2 + y^2)$$

Quando a si annulli si riduce evidentemente all' equazione della sfera. Si seghi ora la superficie con un piano parallelo al piano delle xz, e supponiamo che il piano secante sia distante dall'asse delle quantità c, che rappresenta il raggio del circolo, si dovrà fare nell'equazione del toro $y = c$, d'onde per l'equazione della sezione risulterà

$$(x^2 + z^2 + a^2)^2 = 4a^2 (x^2 + c^2)$$

e che si potrà anche rappresentare per

$$z^4 + 2z^2 (a^2 + x^2) + (a^2 - x^2)^2 = 4a^2 c^2$$

Sia b una costante, maggiore, o minore di a, e prendiamo

$$c = \frac{b^2}{2a}$$

la precedente equazione si ridurrà ad

$$z^4 + 2z^2(a^2 + x^2) + (a^2 - x^2)^2 = b^4$$

la quale appartiene evidentemente all'Ellissi del Cassini; quindi la curva in questione gode della proprietà rimarcabile di essere una sezione del toro.

245.° Se nell'equazioni di una linea vi si contengano più costanti arbitrarie C, C_1, C_2, C_3 . . . . . in modo che con le variabili x, y, z sia generalmente

$$f(x, y, z, C, C_1, C_2 \ldots) = 0$$

$$F(x, y, z, C, C_1, C_2 \ldots) = 0$$

allora supponendo che fra le costanti C, C_1, C_2 ... sussistano dei rapporti

$$C_1 = \varphi(C), \qquad C_2 = \psi(C), \qquad C_3 = \chi(C) \ldots$$

le nuove equazioni

$$f\Big(x, y, z, \quad C, \varphi(C), \psi(C), \chi(C), \ldots\Big) = 0$$

$$F\Big(x, y, z, \quad C, \varphi(C), \psi(C), \chi(C), \ldots\Big) = 0$$

rappresenteranno per un infinità di valori della costante C una linea che si muove in modo da generare una certa superficie, la costruzione della quale dipende da più funzioni arbitrarie. L'equazione finita di questa superficie si otterrà dall'eliminazione della costante C fra le due riportate equazioni della generatrice. Sotto questa

ipotesi una o più equazioni a derivate parziali le quali in generale saranno di un ordine superiore al primo potranno rappresentare la superficie proposta. Queste equazioni si otterranno primieramente da una successiva derivazione parziale rapporto ad x, ed y delle equazioni delle generatrici, e di considerare la z, e C, come funzioni delle x, y, e quindi di eliminare

$$C\,,\quad D_xC\,,\quad D_yC\,,\quad \ldots\ldots \varphi'(C)\,,\ \ldots\ \psi'(C)\ \ldots$$

fra queste ultime, e quelle della generatrice. Quantunque in generale aumentando il numero delle funzioni arbitrarie contenute nell'equazioni della generatrice aumenti l'ordine, ed il numero delle equazioni a derivate parziali atte a rappresentare la natura della superficie generata, pur tuttavia se fra le fnnzioni arbitrarie sussistano certe particolari relazioni, si potrà abbassare non solo il numero, ma ben anche l'ordine dell'equazioni a derivate parziali, la quale essendo priva di tutte le funzioni arbitrarie, rappresenterà nello stesso tempo la superficie in proposito. Per mostrare una qualche applicazione supponiamo di voler determinare l'equazione a derivate parziali della superficie sviluppabile, la quale abbia per generatrice le differenti rette tangenti una curva a doppia curvatura.

Sieno

$$x=\varphi(z)\ ,\qquad y=\psi(z)$$

l'equazioni della linea, se si prenda nella curva un punto

$$z=C\,,\qquad x=\varphi(C)\,,\qquad y=\chi(C)$$

è chiaro che l'equazioni della retta tangente in questo punto saranno della forma

$$\frac{x-\varphi(C)}{\varphi'(C)}=\frac{y-\psi(C)}{\psi'(C)}=z-C$$

Eseguendo una differenziazione, avremo

$$\frac{dx}{\varphi'(C)} = \frac{dy}{\psi'(C)} = dz$$

la quale in forza dell'antecedente formola si ridurrà ad

$$\frac{dx}{x - \varphi(C)} = \frac{dy}{y - \psi(C)} = \frac{dz}{z - C}$$

Ora avvertendo che per l'equazione della superficie

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

si ricaverà da ambedue

$$1 = p\,\varphi'(C) + q\,\psi'(C)$$

$$z - C = p\left(x - \varphi(C)\right) + q\left(y - \psi(C)\right)$$

Non rimane dunque altro che eliminare le funzioni, e la costante : l'ultima equazione rappresenta la superficie sviluppabile, purchè fra i coefficienti p, q e le derivate $\varphi'(C)$, $\psi'(C)$ sussista la trovata relazione. Eseguendo pertanto due derivazioni parziali nel valore di $z - C$ rapporto ad x, ed y, e ponendo

$$r = D_x p\,, \qquad t = D_y q\,, \qquad s = D_x\,D_y p$$

ossia

$$r = D_x^2 z\,, \qquad t = D_y^2 q\,, \qquad s = D_x\,D_y z$$

otterremo

$$p\,dx - dC = p\left(dx - \varphi'(C)\,dC\right) + r\,dx\left(x - \varphi(C)\right)$$

$$+ s\,dx\left(y - \psi(C)\right) - q\psi'(C)\,dC$$

$$q\,dy - dC = s\,dy\left(x - \varphi(C)\right) - p\,\varphi'(C)\,dC$$

$$+ t\,dy\left(y - \psi(C)\right) + q\left(dy - \psi'(C)\,dC\right)$$

queste due daranno evidentemente

$$o = r\left(x - \varphi(C)\right) + s\left(y - \psi(C)\right)$$

$$o = s\left(x - \varphi(C)\right) + t\left(y - \psi(C)\right)$$

d'onde verrà

$$rt = s^2$$

Tal'è l'equazione unica a derivate parziali del secondo ordine di una superficie sviluppabile, e che risulta dall'eliminazione delle quattro funzioni

$$\varphi(C)\ , \qquad \psi(C)\ , \qquad \varphi'(C)\ , \qquad \psi'(C)$$

Alla medesima espressione si giunge coll'osservare che dalle due equazioni

$$1 = p\,\varphi'(C) + q\,\psi'(C)$$

$$z - C = p\left(x - \varphi(C)\right) + q\left(y - \psi(C)\right)$$

si deduce in generale

$$p = f(C)\ , \qquad q = f_1(C)$$

d'onde

$$p = F(q)$$

e perciò derivando parzialmente rapporto ad x, ed y, si ha

$$r = F'(q)\,s\ , \qquad s = F'(q)\,t$$

e quindi

$$rt - s^2 = o$$

246.° Consideriamo in fine una superficie gobba generata da una retta che striscia sopra due direttrici qualunque, restando nello stesso tempo parallela ad un piano dato.

Sieno

$$f(x, y, z) = 0 , \quad f_1(x, y, z) = 0$$

l'equazioni di una delle direttrici, ed

$$\mathcal{f}(x, y, z) = 0 , \quad \mathcal{f}_1(x, y, z) = 0$$

l'equazioni della seconda delle direttrici. Se per semplicità il piano direttore sia parallelo al piano delle xy, l'equazioni della generatrice saranno della forma

$$y = Cx + C_1 , \quad z = C_2$$

Per esprimere la condizione che questa retta striscia simultaneamente sopra le due direttrici, converrà che i due sistemi

$$y = Cx + C_1 , \; z = C_2 , \; f(x, y, z) = 0 , \; f_1(x, y, z) = 0$$

$$y = Cx + C_1 , \; z = C_2 , \; \mathcal{f}(x, y, z) = 0 , \mathcal{f}_1(x, y, z) = 0$$

Sieno verificati dai medesimi valori di x, y, z : quindi eliminando x, y, z in ciascun di questi due sistemi, si giunge a stabilire

$$C_1 = \varphi(C) , \quad C_2 = \psi(C)$$

d'onde anche

$$C = \Phi(C_2) , \quad C_1 = \chi(C_2)$$

d'onde eliminando fra queste equazioni e quelle della generatrice le costanti C, C_1, C_2 verrà

$$y = x\,\Phi(z) + \chi(z)$$

Tal'è l'equazione finita della richiesta superficie; l'eliminazione delle due funzioni arbitrarie si farà ora per mezzo dell'equazioni a derivate parziali; infatti eseguendo due derivazioni una rapporto ad x, ed una rapporto

ad y, verrà

$$\Phi(z) + x\,\Phi'(z)\,p + \chi(z)\,p = o$$

$$1 = x\,\Phi'(z)\,q + \chi'(z)\,q$$

dalle quali si deduce

$$\frac{p}{q} = -\,\Phi(z)$$

Proseguendo le derivazioni parziali rapporto ad x, ed y, si ottiene

$$\frac{qr - ps}{q^2} = -\,\Phi'(z)p\,, \qquad \frac{qs - pt}{q^2} = -\,\Phi'(z)q$$

quindi eliminando $\Phi'(z)$, avremo in fine

$$q^2r - 2p\,q\,s + p^2t = o$$

Quest' equazione a derivate parziali del second' ordine non lineare rappresenta la superficie gobba in proposito, ove due posizioni consecutive della generatrice non sono in linea retta.

Sull'Equazioni delle superficie generate dal moto di una linea obbligata a passare per una direttrice data, ed in particolare delle superficie coniche, cilindriche, conoidi, e di rivoluzione circoscritte ad una superficie data.

247.° Consideriamo una superficie, della quale la sua costruzione dipenda da una sola funzione arbitraria. Sieno secondo il consueto

$$v = C\,, \qquad w = \varphi(C)$$

l'equazioni della generatrice, ove v, w sono due funzioni determinate delle tre coordinate x, y, z. Sieno di più

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0$$

l'equazioni rappresentante la linea direttrice del moto della generatrice. Per determinare l'equazione della superficie generata dal movimento di questa linea obbligata a passare per una data direttrice, converrà assoggettare la natura della funzione arbitraria φ, a verificare l'indicata condizione; ciò che noi potremo ottenere nel modo seguente: infatti sieno sempre x, y, z le coordinate di un punto qualunque della direttrice, come ξ, η, ζ sieno le coordinate di nn punto qualunqne della generatrice, è evidente che chiamando V, W ciò che divengono v, w per la sostituzione di ξ, η, ζ invece di x, y, z, si avrà

$$V = v, \qquad W = w$$

quindi eliminando x, y, z fra qneste due equazioni, e quella della direttrice, si giungerà ad un' equazione la quale non contenendo che le tre coordinate ξ, η, ζ rappresenterà certamente la superficie in questione. È facile di applicare questa teoria alle superficie coniche, cilindriche aventi per direttrice una linea piana, ed in particolare una del second'ordine.

Supponiamo adesso che la proposta superficie debba essere circoscritta ad una data superficie rappresentata da una equazione

$$u = 0$$

In questa ipotesi la direttrice si confonderà con la linea di contatto delle due superficie: ora la normale condotta per un pnnto qualunque (x, y, z) della linea di contatto, e la tangente condotta per il medesimo punto alla generatrice della superficie, s'incontrano ad angolo

retto, e perciò avremo l'equazione di condizione

$$P\, D_x u + Q\, D_y u + R\, D_z u = o$$

ove P, Q, R come dal parag. 241 sono le tre note funzioni delle x, y, z proporzionali ai coseni degli angoli formati dalla tangente alla generatrice con i tre assi ortogonali, come $D_x u$, $D_y u$, $D_z u$ sono proporzionali ai coseni degli angoli formati dalla normale alla linea dei contatti con i medesimi tre assi; e perciò l'equazioni della direttrice saranno

$$u = o, \qquad P\, D_x u + Q\, D_y u + R\, D_z u = o$$

ed infine l'equazione della superficie si otterrà dall'eliminazione delle tre coordinate x, y, z fra le due ultime e le

$$V = v, \qquad W = w.$$

248.° Vediamo come questa trovi una facile applicazione alle superficie coniche. Un cono dicesi circoscritto ad una superficie curva, quando viene generato da una retta che passando per un punto fisso muovesi tangenzialmente alla superficie. Sieno x_o, y_o, z_o le coordinate del vertice preso in un punto del piano tangente e da questo punto si conduca una retta al punto di contatto (x, y, z), l'equazioni della generatrice saranno

$$\frac{\xi - x_o}{\zeta - z_o} = \frac{x_o - x}{\zeta - z}, \quad \frac{\eta - y_o}{\zeta - z_o} = \frac{y_o - y}{\zeta - z}$$

e per quanto si è detto alla fine dell'antecedente parag. le P, Q, R saranno incluse nella frazione

$$\frac{P}{x - x_o} = \frac{Q}{y - y_o} = \frac{R}{z - z_o}$$

d'onde l'equazioni della direttrice saranno

$$u = 0,\ (x-x_0)\,D_x u + (y-y_0)\,D_y u + (z-z_0)\,D_z u = 0$$

quindi per ottenere l'equazione della richiesta superficie conica basterà eliminare le x, y, z fra l'equazioni trovate della direttrice, e della generatrice.

Supponiamo per una qualche applicazione che l'equazione $u = 0$ si riduca ad una superficie del second'ordine della forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz - K = 0$$

si avrà

$$D_x u = 2(Ax + Ez + Fy + G)$$
$$D_y u = 2(By + Dz + Fx + H)$$
$$D_z u = 2(Cz + Dy + Ex + I)$$

d'onde l'equazione della direttrice diverrà per l'equazione della superficie,

$$(Ax_0 + Ez_0 + Fy_0 + G)\,x + (By_0 + Dz_0 + Fx_0 + H)\,y$$
$$+ (Cz_0 + Dy_0 + Ex_0 + I)\,z + Gx_0 + Hy_0 + Iz_0 - K = 0$$

Che se nella stessa equazione della direttrice si sostituiscano i valori di $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ desunti dalla generatrice si troverà in forza della precedente equazione

$$(A\xi + E\zeta + F\eta + G)\,x + (B\eta + D\zeta + F\xi + H)\,y$$
$$+ (C\zeta + D\eta + E\xi + I)\,z + G\xi + H\eta + I\zeta - K = 0$$

quindi ponendo per brevità

$$L = -\frac{A\xi + E\zeta + F\eta + G}{G\xi + H\eta + I\zeta - K},\quad M = -\frac{B\eta + D\zeta + F\xi + H}{G\xi + H\eta + I\zeta - K}$$

$$N = -\frac{C\zeta + D\eta + E\xi + I}{G\xi + H\eta + I\zeta - K}$$

ed insieme

$$L_1 = -\frac{Ax_0 + Ez_0 + Fy_0 + G}{Gx_0 + Hy_0 + Iz_0 - K}, \quad M_1 = -\frac{By_0 + Dz_0 + Fx_0 + H}{Gx_0 + Hy_0 + Iz_0 - K}$$

$$N_1 = -\frac{Cz_0 + Dy_0 + Ex_0 + I}{Gx_0 + Hy_0 + Iz_0 - K}$$

le due ultime equazioni si trasformeranno in

$$Lx + My + Nz = 1 \,, \qquad L_1x + M_1y + N_1z = 1$$

Di più dall'equazioni della generatrice abbiamo

$$\frac{\xi - x}{x_0 - x} = \frac{\eta - y}{y_0 - y} = \frac{\zeta - z}{z_0 - z}$$

dalle quali possiamo anche ricavare

$$\frac{(\xi - x)L}{(x_0 - x)L} = \frac{(\eta - y)M}{(y_0 - y)M} = \frac{(\zeta - z)N}{(z_0 - z)N}$$

$$\frac{(\xi - x)L_1}{(x_0 - x)L_1} = \frac{(\eta - y)M_1}{(y_0 - y)M_1} = \frac{(\zeta - z)N_1}{(z_0 - z)N_1}$$

quindi facendo nelle respettive frazioni eguali la somma di tutti i numeratori, e la somma di tutti i denominatori avremo due altre frazioni eguali, le quali si ridurranno semplicemente ad

$$\frac{L\xi + M\eta + N\zeta - 1}{Lx_0 + My_0 + Nz_0 - 1} = \frac{L_1\xi + M_1\eta + N_1\zeta - 1}{L_1x_0 + M_1y_0 + N_1z_0 - 1}$$

Avvertendo in fine che

$$Lx_0 + My_0 + Nz_0 - 1 = L_1\xi + M_1\eta + N_1\zeta - 1$$

si avrà

$$(L_1\xi+M_1\eta+N_1\zeta-1)^2=(L_1x_0+M_1y_0+N_1z_0-1)\,(L\xi+M\eta+N\zeta-1)$$

Tal'è la ricercata equazione del cono circoscritto ad una superficie del second'ordine, e sarà esso stesso una superficie conica del second'ordine. Sostituendo nuovamente i valori dei sei coefficienti L, M, N, L_1, M_1, N_1 e rappresentando per $\varphi(x, y, z)$ la somma di tutti i termini, dei quali risulta l'equazione della superficie del second'ordine otterremo con facilità

$$\Big((Ax_0+Ez_0+Fy_0+G)\xi+(By_0+Dz_0+Fx_0+H)\eta$$

$$+(Cz_0+Dy_0+Cx_0+I)\zeta+Gx_0+Hy_0+Iz_0-K\Big)^2$$

$$=\varphi(x_0, y_0, z_0)\,\varphi(\xi, \eta, \zeta)$$

È facile di determinare il luogo geometrico dei punti di contatto; infatti dalle due equazioni

$$\varphi(x, y, z)=0, \qquad L_1x+M_1y+N_1z=1$$

la prima delle quali appartiene alla superficie del secondo ordine, e la seconda ad un piano, si deduce, che la linea risultante dall'intersezione di queste due superficie sarà interamente situata in un piano: alla medesima conseguenza si giunge col fare nell'equazione del cono circoscritto $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$, ciò che da primieramente

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta)=0$$

ed in fine

$$(Ax_0+Ez_0+Fy_0+G)\,x+(By_0+Dz_0+Fx_0+H)y$$

$$+(Cz_0+Dy_0+Ex_0+I)\,z+Gx_0+Hy_0+Iz_0-K=0$$

la quale per tutti i punti x, y, z appartiene ad un piano.

249.° Si rappresenti la precedente equazione della curva piana di contatto sotto la forma

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

ove α, β, γ, δ sono espresse per le coordinate x_0, y_0, z_0 del vertice della superficie conica. Può essere che invece del vertice del cono sia dato il piano della curva di contatto: in questa ipotesi per la determinazione delle coordinate del vertice si avranno le equazioni

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{Ax_0 + Ez_0 + Fy_0 + G}{Cz_0 + Dy_0 + Ex_0 + I}$$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{By_0 + Dz_0 + Fx_0 + H}{Cz_0 + Dy_0 + Ex_0 + I}$$

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{Gx_0 + Hy_0 + Iz_0 - K}{Cz_0 + Dy_0 + Ex_0 + I}$$

le quali risolute rapporto ad x_0, y_0, z_0 somministreranno i valori delle medesime coordinate del vertice: le quantità date

$$\frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\beta}{\gamma},\ \frac{\delta}{\gamma}$$

possono essere legate fra di loro o da una sola relazione

$$f\left(\frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\beta}{\gamma},\ \frac{\delta}{\gamma}\right) = 0$$

od anche da due relazioni

$$f\left(\frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\beta}{\gamma},\ \frac{\delta}{\gamma}\right) = 0, \quad f_1\left(\frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\beta}{\gamma},\ \frac{\delta}{\gamma}\right) = 0$$

In ambedue i casi la sostituzione dei valori di $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\delta}{\gamma}$

darà il luogo geometrico dei vertici della superficie conica circoscritta, della quale il piano della curva di contatto è soggetto ad una, o a due delle date condizioni Questi risultati si potranno enunciare nel modo seguente (*).

I. Se il piano della curva di contatto si muove in modo che i coefficienti della sua equazione soddisfino ad una data condizione, il vertice della superficie conica percorre una superficie del grado medesimo di questa condizione.

II. Se il piano della curva di contatto si muove in modo che i coefficienti della sua equazione soddisfino a due date condizioni, il vertice della superficie conica percorre una curva, che è l'intersezione delle due superficie del grado medesimo di queste due condizioni.

Per brevità tralasciamo di presentare delle applicazioni di queste due proposizioni, e ci fermeremo alquanto nell'equazione del cono circoscritto ad un'ellissoide data.

250.° Se giusta il consueto a, b, c sieno i semiassi principali di un'ellissoide, la sua equazione con l'origine al centro, e con gli assi ortogonali paralleli ai semiassi principali, sarà

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

d'onde per le due funzioni $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ risulterà evidentemente

$$\varphi(x_0, y_0, z_0)=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1$$

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta)=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1$$

(*) Giorgini, Superficie del secondo grado pag. 41.

e perciò la ricercata equazione del cono circoscritto sarà

$$\left(\frac{x_0\xi}{a^2}+\frac{y_0\eta}{b^2}+\frac{z_0\zeta}{c^2}-1\right)^2$$

$$=\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$$

Per una differente supposizione di casi particolari, questa equazione si ridurrà facilmente ad altre equazioni note; così se l'ellissoide si riduca ad una sfera di raggio a, e che l'asse del cono coincida con l'asse delle z, si avrà $a=b=c$, $x_0=0$, $y_0=0$, d'onde

$$(z_0\zeta-a^2)^2=(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-a^2)(z_0^2-a^2)$$

ovvero

$$\xi^2+\eta^2=\frac{a^2}{z_0^2-a^2}(\zeta-z_0)^2$$

la quale appartiene ad un cono circolare. Riprendendo poi la primitiva ipotesi che a, b, c sieno fra di loro differenti; l'equazione della superficie conica si potrà presentare anche sotto la forma

$$\left(\frac{y_0\xi-x_0\eta}{ab}\right)^2+\left(\frac{z_0\xi-x_0\zeta}{ac}\right)^2+\left(\frac{z_0\eta-y_0\zeta}{bc}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\xi-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{\eta-y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{\zeta-z_0}{c}\right)^2$$

Qui pure per $a=b=c$, otterremo semplicemente

$$(y_0\xi-x_0\eta)^2+(z_0\xi-x_0\zeta)^2+(z_0\eta-y_0\zeta)^2$$

$$=a^2\Big((\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2\Big)$$

È assai facile di vedere, che il primo membro esprime

il doppio dell'area triangolare, della quale due lati sono le rette che dal centro della sfera si conducono ai punti (ξ, η, ζ) (x_o, y_o, z_o) ed il terzo lato sarà la distanza dei medesimi punti. Per brevità tralasciamo di fare altre applicazioni per le due iperboloidi, e per le due paraboloidi rappresentate da equazioni di già richiamate ai parag. 299, . . 201.

251.° Per un cilindro circoscritto ad una superficie curva, se sieno a, β, γ gli angoli formati dalla generatrice rettilinea con i tre assi ortogonali, si avrà per l'equazioni della generatrice

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma}$$

quindi come si ricava dallo stesso parag. 242 potremo prendere per le P, Q, R le frazioni

$$\frac{P}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\cos\beta} = \frac{R}{\cos\gamma}$$

d'onde l'equazioni della direttrice si ridurranno ad

$$u = o, \qquad \cos\alpha\, D_x u + \cos\beta\, D_y u + \cos\gamma\, D_z u = o$$

Eliminando adunque le coordinate x, y, z fra l'equazioni della generatrice, e della direttrice si giungerà ad una equazione, la quale contenendo le sole ξ, η, ζ rappresenterà la superficie cilindrica in questione. Se qui pure si prenda una superficie del secondo ordine come si è fatto al parag. 248; l'equazione della direttrice diverrà

$$(A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma)\,x + (B\cos\beta + D\cos\gamma + F\cos\alpha)\,y$$

$$+ (C\cos\gamma + D\cos\beta + E\cos\alpha)\,z + G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma = o$$

od anchè ordinando rapporto a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ si otterrà

$$(Ax+Fy+Ez+G)\cos\alpha+(Fx+By+Dz+H)\cos\beta$$
$$+(Ex+Dy+Cz+I)\cos\gamma=0$$

Che se si eliminano $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ per mezzo delle equazioni della generatrice, e si rifletta all' equazione della superficie del second'ordine, verrà

$$(A\xi+F\eta+E\zeta+G)x+(F\xi+B\eta+D\zeta+H)y$$
$$+(E\xi+D\eta+C\zeta+I)z+G\xi+H\eta+I\zeta-K=0$$

e ponendo al solito

$$L=-\frac{A\xi+E\zeta+F\eta+G}{G\xi+H\eta+I\zeta-K}$$

$$M=-\frac{B\eta+D\zeta+F\xi+H}{G\xi+H\eta+I\zeta-K}$$

$$N=-\frac{C\zeta+D\eta+E\xi+I}{G\xi+H\eta+I\zeta-K}$$

ed insieme

$$L_1=-\frac{A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma}{G\cos\alpha+H\cos\beta+I\cos\gamma}$$

$$M_1=-\frac{B\cos\beta+F\cos\alpha+D\cos\gamma}{G\cos\alpha+H\cos\beta+I\cos\gamma}$$

$$N_1=-\frac{C\cos\gamma+E\cos\alpha+D\cos\beta}{G\cos\alpha+H\cos\beta+I\cos\gamma}$$

Le due equazioni ordinate rapporto ad x, y, z diverranno

$$Mx+My+Nz=1\ ,\qquad L_1x+M_1y+N_1z=1$$

Ora dall' equazioni della generatrice ricaviamo con facilità, come già si è fatto per le superficie coniche

$$\frac{(\xi-x)L+(\eta-y)M+(\zeta-z)N}{L\cos\alpha+M\cos\beta+N\cos\gamma}=\frac{(\xi-x)L_1+(\eta-y)M_1+(\zeta-z)N_1}{L_1\cos\alpha+M_1\cos\beta+N_1\cos\gamma}$$

le quali in forza delle precedenti si ridurranno ad

$$\frac{L\xi+M\eta+N\zeta-1}{L\cos\alpha+M\cos\beta+N\cos\gamma}=\frac{L_1\xi+M_1\eta+N_1\zeta-1}{L_1\cos\alpha+M_1\cos\beta+N_1\cos\gamma}$$

ove avvertendo che

$$L\cos\alpha+M\cos\beta+N\cos\gamma=L_1\xi+M_1\eta+N_1\zeta-1$$

e facendo per brevità

$$A_1=A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma\,,\quad B_1=B\cos\beta+F\cos\alpha+D\cos\gamma$$

$$C_1=C\cos\gamma+E\cos\alpha+D\cos\beta,\quad D_1=G\cos\alpha+H\cos\beta+I\cos\gamma$$

verrà dopo facile riduzione

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\frac{(A_1\xi+B_1\eta+C_1\xi+D_1)^2}{A_1\cos\alpha+B_1\cos\beta+C_1\cos\gamma}$$

Tal'è l'equazione del cilindro circoscritto ad una superficie qualunque del second'ordine. Qui pure il luogo geometrico dei punti di contatto è una curva piana, e di second'ordine come si vede chiaramente col fare $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$, ove la serie dei punti di contatto trovasi nella superficie del secondo ordine.

Supponendo che la superficie del secondo ordine si riduca ad un ellissoide di semiassi principali a, b, c; l'equazione del cilindro circoscritto sarà evidentemente

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=\frac{\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2}+\frac{\eta\cos\beta}{b^2}+\frac{\zeta\cos\gamma}{c^2}\right)^2}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}}$$

ove chiamando r una distanza che del centro dell'ellissoide si conduce ad un punto della medesima, parallelamente alla generatrice del cilindro, verrà

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}}$$

e perciò si ridurrà ad

$$\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2} + \frac{\eta\cos\beta}{b^2} + \frac{\zeta\cos\gamma}{c^2}\right)^2 r^2 = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1$$

Sotto qualche altra forma più semplice si potrebbe questa equazione, ma per brevità tralasciamo di fare non solo questa, ma ben anche in particolare per le altre superficie del second'ordine.

252.° Parliamo brevemente delle superficie conoidi circoscritte. Supponendo che l'asse della superficie si confonda con l'asse delle z, e che la generatrice sia parallela al piano delle xy, l'equazioni della generatrice saranno come si è veduto al parag. 243

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{x}{y} \qquad \zeta = z$$

Per le quantità P, Q, R si trova

$$\frac{P}{x} = \frac{Q}{y}, \qquad R = o$$

d'onde l'equazioni della direttrice saranno

$$u = o \qquad xD_x u + yD_y u = o$$

e per conseguenza eliminando le coordinate x, y, z del punto di contatto fra l'equazioni della generatrice, e della

direttrice, otterremo la richiesta equazione della superficie conoide circoscritta. Così chiamando x_1, y_1, z_1, le coordinate del centro di un ellissoide prendiamo la sua equazione

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}+\frac{(z-z_1)^2}{c^2}=1$$

si avrà

$$D_x u=\frac{2(x-x_1)}{a^2}\quad,\qquad D_y u=\frac{2(y-y_1)}{b^2}$$

d'onde la seconda equazione della direttrice diverrà

$$\frac{x(x-x_1)}{a^2}+\frac{y(y-y_1)}{b^2}=0$$

ove sostituendo al rapporto di x ad y quello di ξ, ad η verrà ancora

$$\frac{\xi}{a^2}(x-x_1)+\frac{\eta}{b^2}(y-y_1)=0$$

Per eliminare con più facilità le x, y, z avvertiremo che da questa ultima equazione si ottiene

$$\frac{x-x_1}{\left(\frac{\eta}{b^2}\right)}=\frac{y-y_1}{\left(-\frac{\xi}{a^2}\right)}=\frac{\eta(x-x_1)-\xi(y-y_1)}{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}}=\frac{y_1\xi-x_1\eta}{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}}$$

Inoltre dalla medesima abbiamo

$$\frac{x-x_1}{\left(\frac{\eta}{b^2}\right)}=\frac{y-y_1}{\left(-\frac{\xi}{a^2}\right)}=\pm\frac{\left(\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{ab}\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\pm ab\,\frac{\left(1-\frac{(z-z_1)^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ove sostituendo ζ invece di z, ed eguagliando fra di loro le due differenti trovate espressioni si ricaverà

$$\frac{(y_1\xi - x_1\eta)^2}{a^2\,b^2} = \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right)\left(1 - \frac{(\zeta - z_1)^2}{c^4}\right)$$

Questa equazione appartiene alla superficie conoide circoscritta all'ellissoide; ove l'asse della conoide si confonde con l'asse delle z.

253.° Parliamo infine della circoscrizione delle superficie di rivoluzione. Quando l' asse di rotazione sia l'asse stesso delle z, allora come si è veduto al paragrafo 244, la sua equazione sarà

$$x^2 + y^2 = \varphi(z)$$

Ora ritenendo per x, y, z le coordinate di un punto qualunque della linea di contatto, e per ξ, η, ζ le coordinate di un punto della generatrice, avremo simultaneamente

$$\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2, \qquad \zeta = z$$

Le quantità P, Q, R saranno date dalle frazioni

$$\frac{P}{y} = -\frac{Q}{x}, \qquad R = o$$

d'onde l'equazioni della direttrice saranno

$$u = o \qquad\qquad y D_x u - x D_y u = o$$

La consueta eliminazione delle x, y, z fra l' equazioni della direttrice, e della generatrice darà in ultimo la ricercata equazione della superficie circoscritta.

Per una qualche applicazione prendiamo come si è fatto per le superficie conoidi un ellissoide generata dalla rotazione di un ellissi attorno l' asse delle z, la

sua equazione potrà essere della forma

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{a^2}+\frac{(z-z_1)^2}{c^2}=1$$

d'onde

$$D_x u=\frac{2(x-x_1)}{a^2}, \qquad D_y u=\frac{2(y-y_1)}{a^2}$$

e perciò la seconda dell'equazione della direttrice, diverrà

$$yx_1-xy_1=0$$

d'onde avvertendo anche all'equazioni della generatrice ricaveremo con facilità

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\pm\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\pm\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

Inoltre dallo stesso rapporto di frazioni abbiamo egualmente

$$\frac{x-x_1}{x_1}=\frac{y-y_1}{y_1}=-1\pm\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}},$$

come d'altronde

$$\frac{x-x_1}{x_1}=\frac{y-y_1}{y_1}=\pm\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\pm\frac{a}{c}\frac{\sqrt{c^2-(\zeta-z_1)^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

dunque formando eguaglianza fra i due valori delle frazioni, ed elevando al quadrato verrà

$$\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\pm\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)^2=\frac{a^2}{c^2}\left(c^2-(\zeta-z_1)^2\right)$$

Eseguendo gli indicati sviluppi, e trasponendo nel secondo membro il doppio prodotto ed elevando di nuovo

al quadrato, si otterrà

$$\left(\xi^2+\eta^2-\frac{a^2}{c^2}(c^2-(\zeta-z_1)^2)+x_1^2+y_1^2\right)^2=4(x_1^2+y_1^2)(\xi^2+\eta^2)$$

Questa equazione rappresenta una superficie di rivoluzione circoscritta ad un ellissoide parimente di rivoluzione attorno il comune asse delle z, ed ove x_1, y_1, z_1 sono le coordinate del centro. Oltre le superficie circoscritte, si potrebbero considerare più generalmente le superficie conosciute sotto il nome di *Inviluppi*, rappresentate o da equazioni finite, o da equazioni a derivate parziali, ma i limiti di già oltrepassati nella compilazione di questa Opera non ci permettono di entrare in questa teoria, e possono consultarsi in particolare le Opere di Monge, ed i trattati del sig. ab. Moigno, e del sig. Le Roy ove questa materia è chiaramente e diffussamente esposta.

Nella pagina 374 all'ultima linea, avanti la nota invece di dire « un contatto dello stesso ordine » dicasi « un contatto di ordine inferiore. »

—

Pag. 433 nell'ultima linea alla formola

$$Y = \frac{a(\operatorname{sen} u \cos 2u - \operatorname{sen} 3u)}{\sqrt{\cos 2u}}$$

si sostituisca

$$Y = \frac{a(3 \operatorname{sen} u \cos 2u - \operatorname{sen} 3u)}{\sqrt{\cos 2u}}$$

—

Nella pagina 479 alla prima linea fino alla settima si sostituisca come segue:
Se dalla somma della prima, e della terza si sottragga il doppio della seconda, si otterrà l'equazione

$$\left(\frac{x-X}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-Y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z-Z}{c}\right)^2 = 0$$

la quale non può essere soddisfatta che dai valori

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z,$$

OSSERVAZIONE DA FARSI AL PARAG. 21.

L'argomento t dell'espressione immaginaria $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ determinato dalla formola

$$\operatorname{tang} t = \frac{\beta}{\alpha}$$

rimane in generale di valor finito per $\alpha=0, \beta=0$, ma non si escludono i casi di $\frac{0}{0}=0$, e di $\frac{0}{0}=\infty$, nei quali hanno egualmente luogo tutti gli ottenuti risultati.

NIHIL OBSTAT

Ignatius Calandrelli Censor Philosophicus.

Carolus Sereni Censor Philosophicus.

IMPRIMATUR

Fr. Dom. Buttaoni O. P. S. P. A. Mag.

IMPRIMATUR

Joseph Canali Archiep. Coloss. Vicesg.